Алгоритмы и структуры данных

Лекция 5. Структуры данных: деревья

(c) Глухих Михаил Игоревич, glukhikh@mail.ru

Деревья

- Разновидность графа (неориентированный граф без циклов)

Деревья

- Разновидность графа (неориентированный граф без циклов)
- Классификация
  - N-арное
    - Префиксное дерево
    - …
  - Бинарное
    - Бинарное дерево поиска
      - …

Бинарные деревья поиска

- Java-интерфейсы
  - SortedSet
    - Как сравниваем?

Бинарные деревья поиска

- Java-интерфейсы
  - SortedSet
    - Comparable OR Comparator

Бинарные деревья поиска

- Элемент = Ключ + Данные
- Ключи у разных элементов не совпадают и поддерживают отношение полного порядка

Отношение полного порядка

- Total ordering
  - <=
  - a <= b AND b <= a <==> a == b
  - a <= b AND b <= c ==> a <= c
  - a <= b OR b <= a <==> ALWAYS

Отношение полного порядка

- Total ordering
  - <=
  - a <= b AND b <= a <==> a == b
  - a <= b AND b <= c <==> a <= c
  - a <= b OR b <= a

  - <
  - a < b AND b < a <==> NEVER
  - a < b AND b < c ==> a < c
  - a < b OR b < a OR a == b <==> ALWAYS

Бинарные деревья поиска

- Элемент = Ключ + Данные
- Ключи у разных элементов не совпадают и поддерживают отношение порядка
- Операции
  - Search (Key)
  - Insert (Key, Value)
  - Remove (Key)
- Дополнительные операции
  - Maximum() / Minimum()

Бинарные деревья поиска

- Элемент = Ключ + Данные
- Ключи у разных элементов не совпадают и поддерживают отношение порядка
- Операции
  - Search (Key)
  - Insert (Key, Value)
  - Remove (Key)
- Дополнительные операции
  - Maximum() / Minimum()
  - Successor(Key) / Predecessor(Key)

Бинарные деревья поиска

- Java-интерфейсы
  - SortedSet extends Set
    - Как сравниваем = Comparator / Comparable

Бинарные деревья поиска

- Java-интерфейсы
  - SortedSet extends Set
    - Как сравниваем = Comparator / Comparable
    - first() / last()

Бинарные деревья поиска

- Java-интерфейсы
  - SortedSet extends Set
    - Как сравниваем = Comparator / Comparable
    - first() / last()
    - headSet() / tailSet() / subSet()

Бинарные деревья поиска

- Java-интерфейсы
  - SortedSet extends Set
    - Как сравниваем = Comparator / Comparable
    - first() / last()
    - headSet() / tailSet() / subSet()
  - NavigableSet extends SortedSet
    - higher() / lower() / floor() / ceiling()

Бинарные деревья поиска

- Java-интерфейсы
  - SortedSet extends Set
    - Как сравниваем = Comparator / Comparable
    - first() / last()
    - headSet() / tailSet() / subSet()
  - NavigableSet extends SortedSet
    - higher() / lower() / floor() / ceiling()
    - descendingSet() / descendingIterator()

Бинарные деревья поиска

- Java-интерфейсы
  - SortedSet extends Set
    - Как сравниваем = Comparator / Comparable
    - first() / last()
    - headSet() / tailSet() / subSet()
  - NavigableSet extends SortedSet
    - higher() / lower() / floor() / ceiling()
    - descendingSet() / descendingIterator()
    - pollFirst() / pollLast()

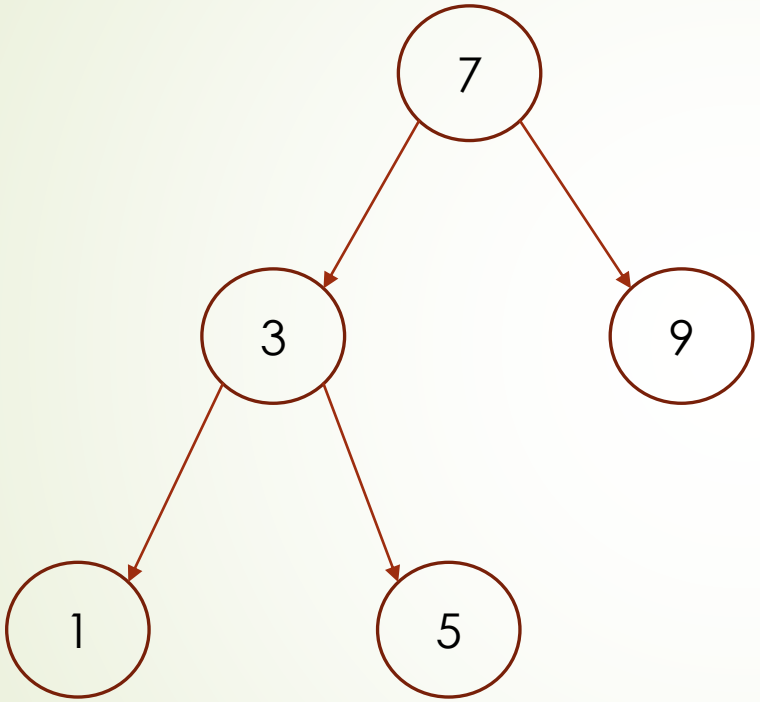
Бинарные деревья поиска

- Java-интерфейсы
  - SortedSet extends Set
    - Как сравниваем = Comparator / Comparable
    - first() / last()
    - headSet() / tailSet() / subSet()
  - NavigableSet extends SortedSet
    - higher() / lower() / floor() / ceiling()
    - descendingSet() / descendingIterator()
    - pollFirst() / pollLast()
- Java-классы
  - TreeSet = на основе красно-чёрного дерева

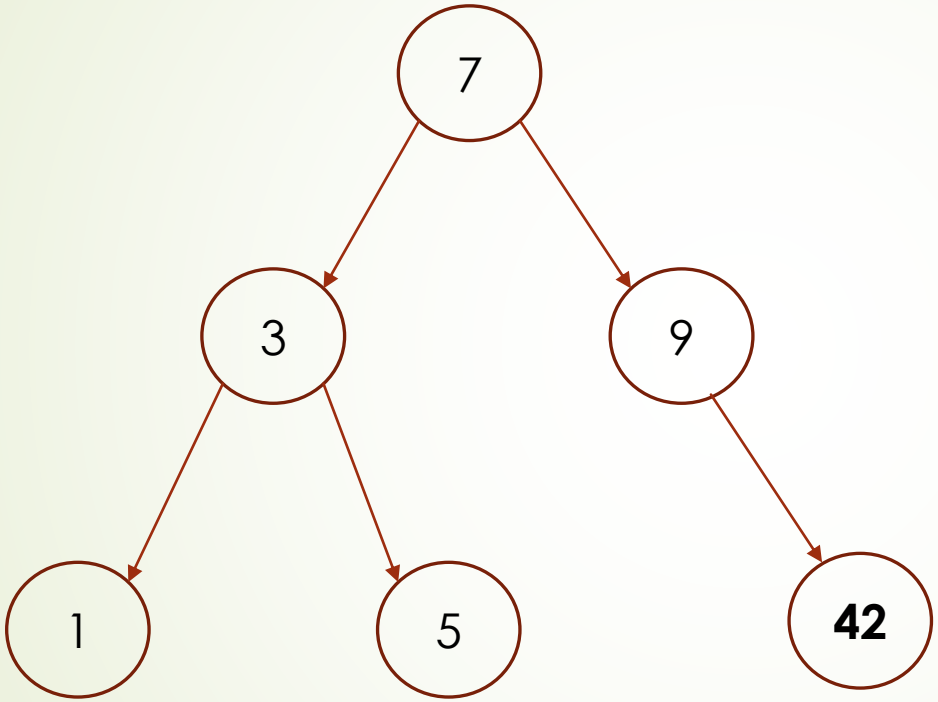
Бинарные деревья поиска

- Варианты реализации
  A. Листья пустые, внутренние узлы содержат ключи и ссылки (ненулевые) ровно на два потомка
  B. Все узлы содержат ключи и ссылки (возможно, нулевые) на два возможных потомка (см. урок 3, BinaryTree)

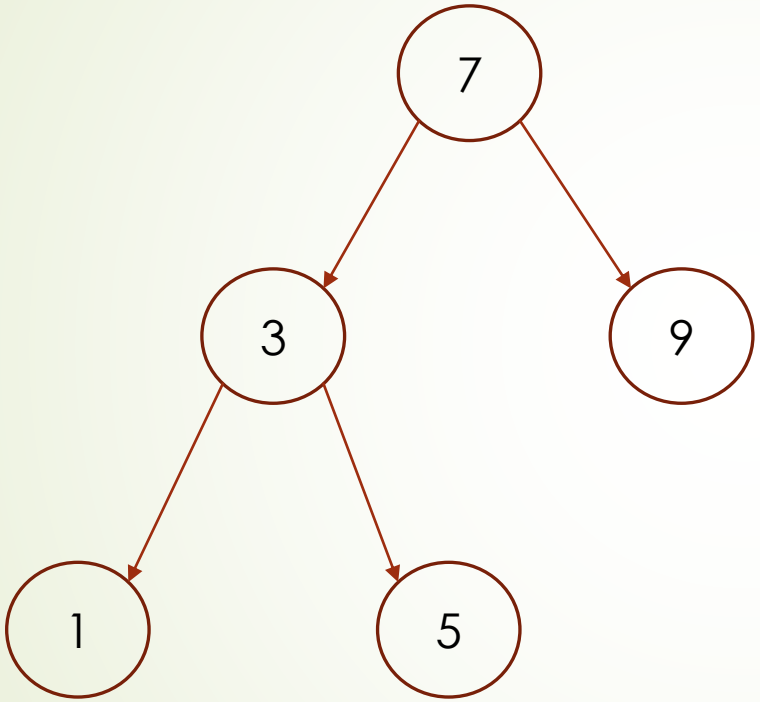
Операции: вставка 42



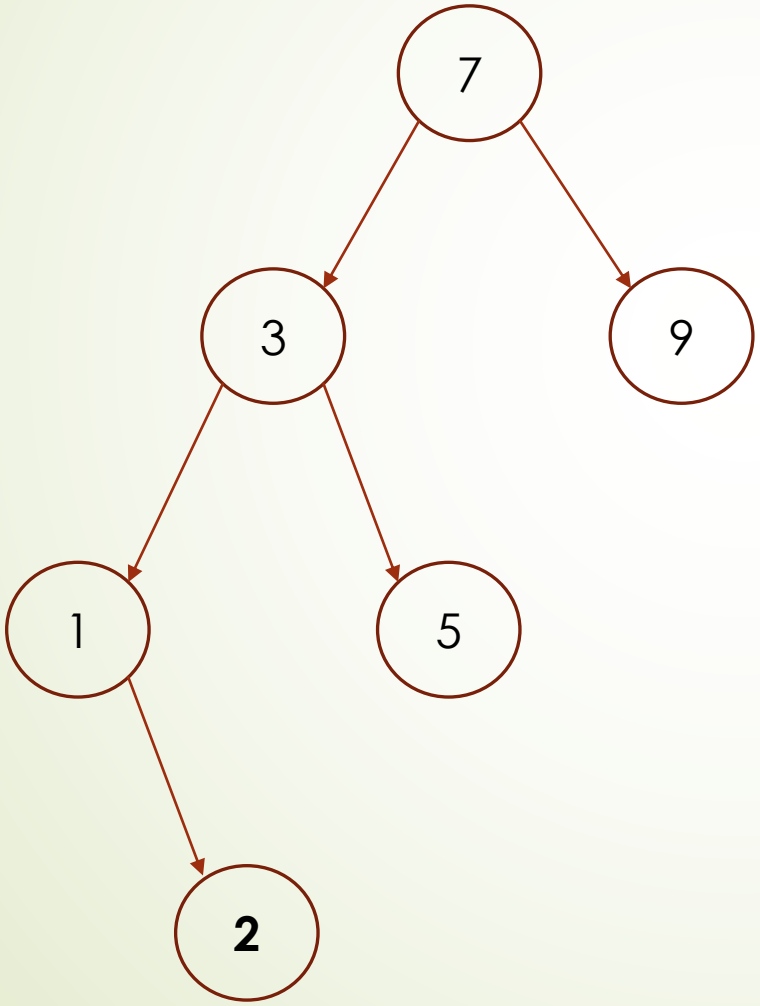
Операции: вставка 42



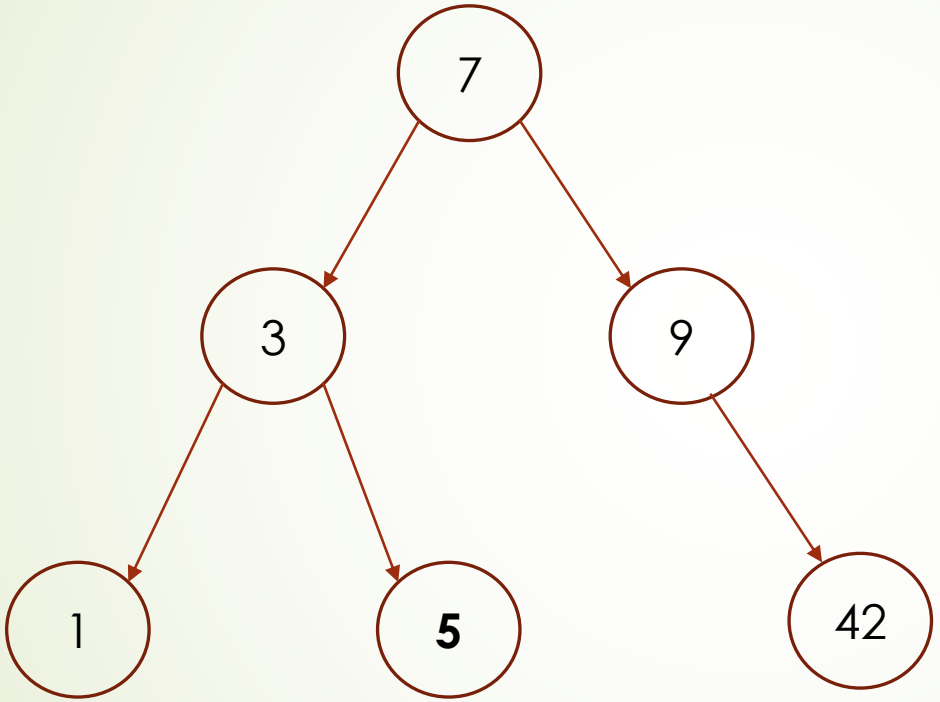
Операции: вставка 2



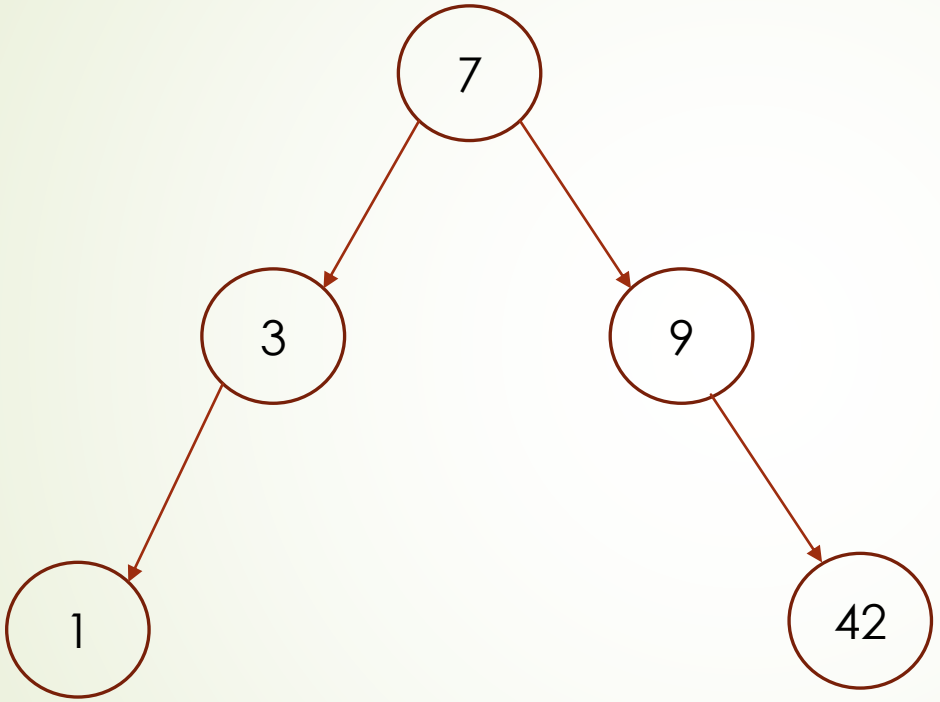
Операции: вставка 2



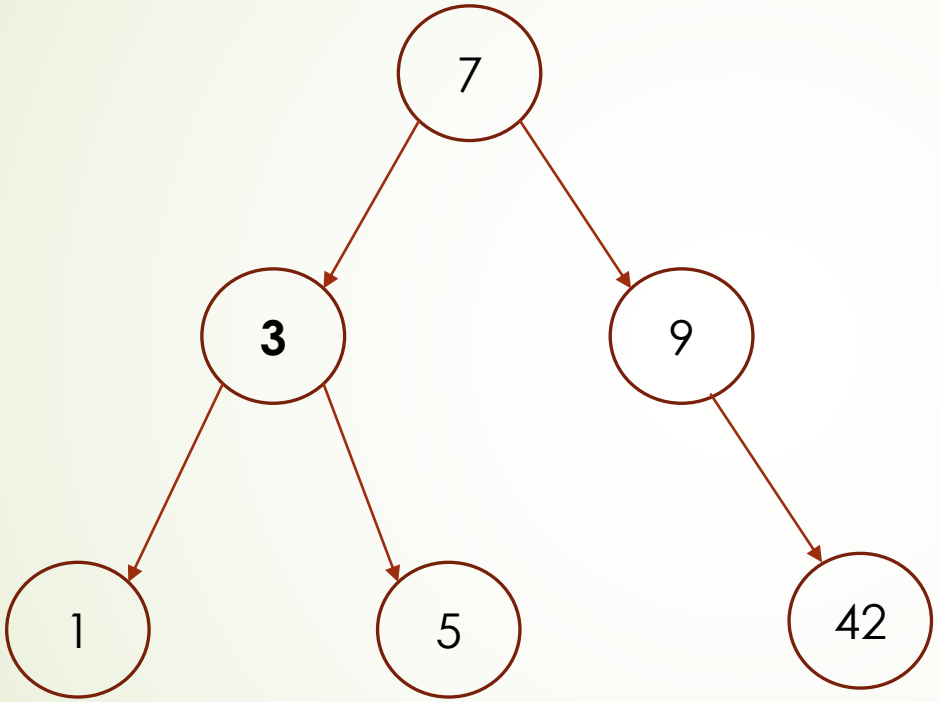
Операции: удаление 5



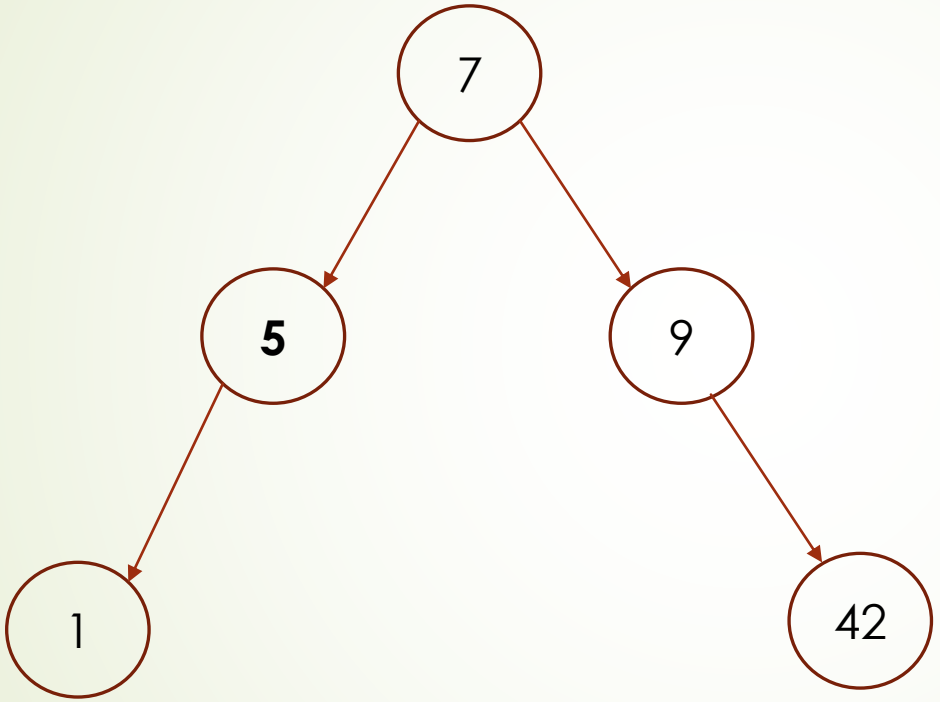
Операции: удаление 5



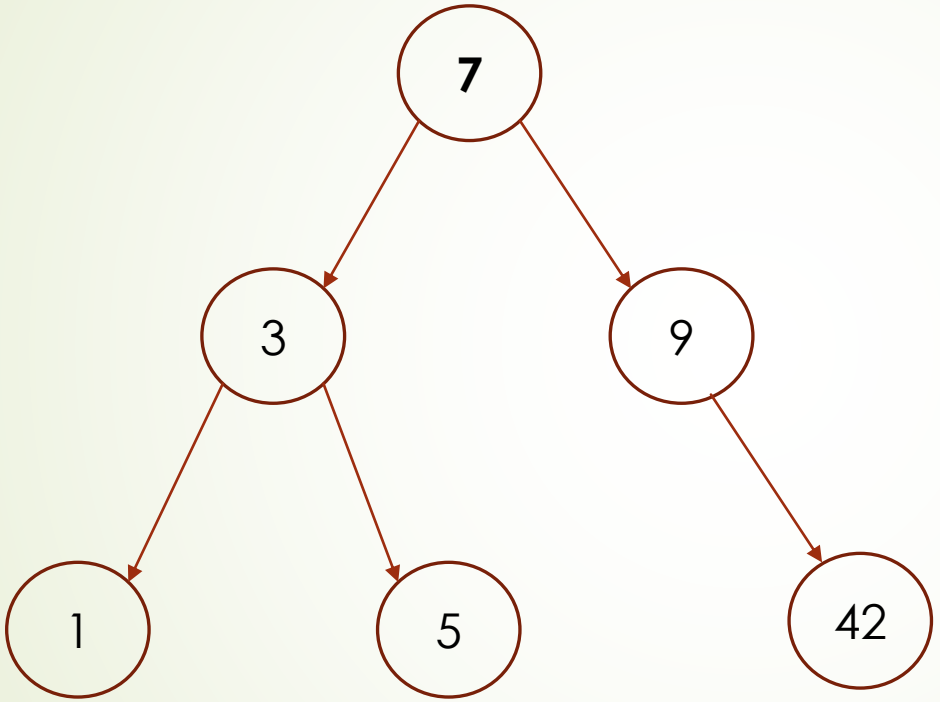
Операции: удаление 3



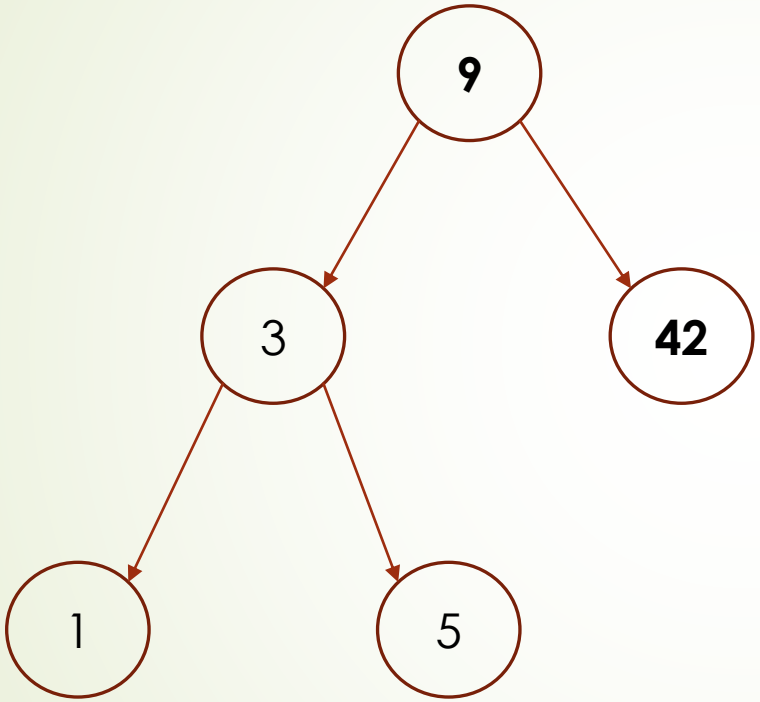
Операции: удаление 3



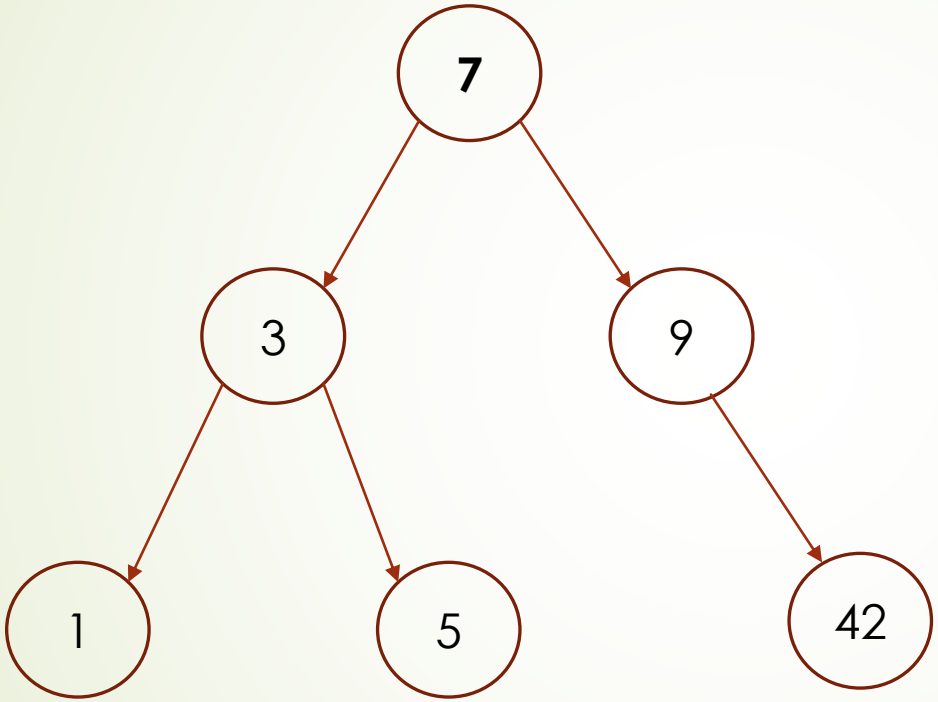
Операции: удаление 7 (а)



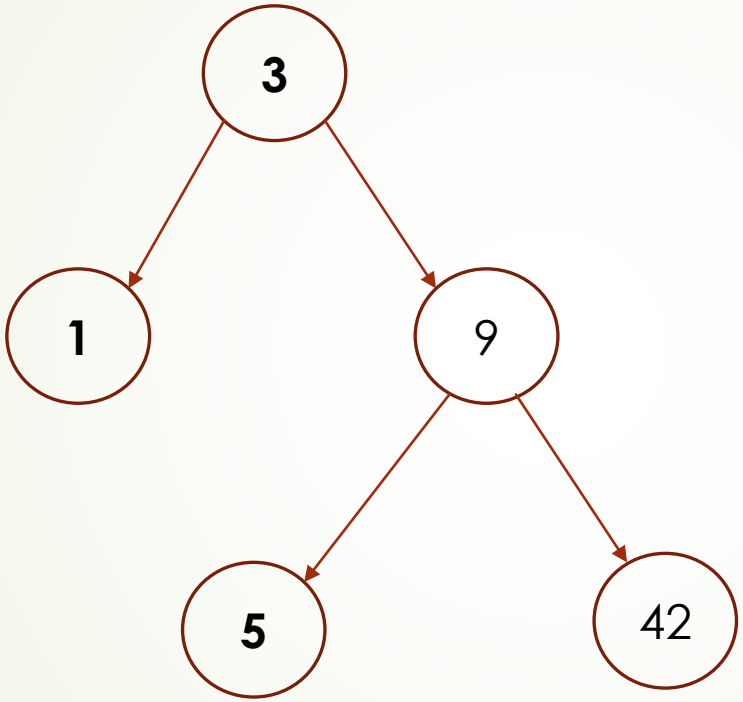
Операции: удаление 7 (а)



Операции: удаление 7 (б)



Операции: удаление 7 (б)



Красно-чёрные деревья

- Свойства
  - Узел = Чёрный ИЛИ Красный
  - Корневой Узел = Чёрный
  - (Нулевые Узлы = Чёрные) (их может и не быть)
  - Потомки Красного Узла = Чёрные
  - Число Чёрных узлов на любом пути вниз = Одинаково (M)

Красно-чёрные деревья

- Свойства
  - Узел = Чёрный ИЛИ Красный
  - Корневой Узел = Чёрный
  - (Нулевые Узлы = Чёрные)
  - Потомки Красного Узла = Чёрные
  - Число Чёрных узлов на любом пути вниз = Одинаково (M)

  - Отсюда: число Красных узлов на любом пути вниз < M
  - Отсюда: число ВСЕХ узлов на любом пути вниз < 2M – 1

Операция с деревом – вставка

- Вставляем КРАСНЫЙ узел
- Если это первый узел – перекрашиваем в ЧЁРНЫЙ

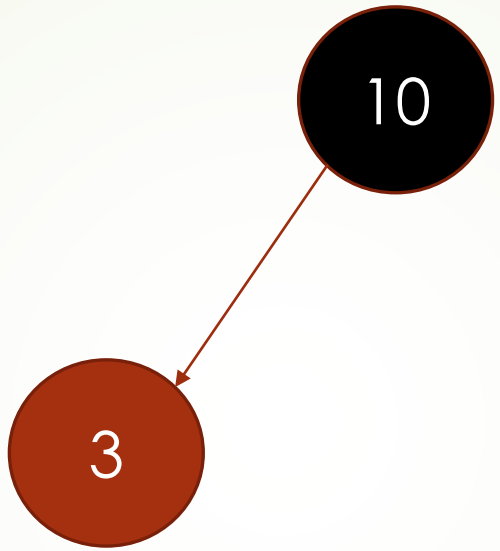
Пример

Операция с деревом – вставка

- Вставляем КРАСНЫЙ узел
- Если это первый узел – перекрашиваем в ЧЁРНЫЙ

- Если родитель узла ЧЁРНЫЙ – ОК

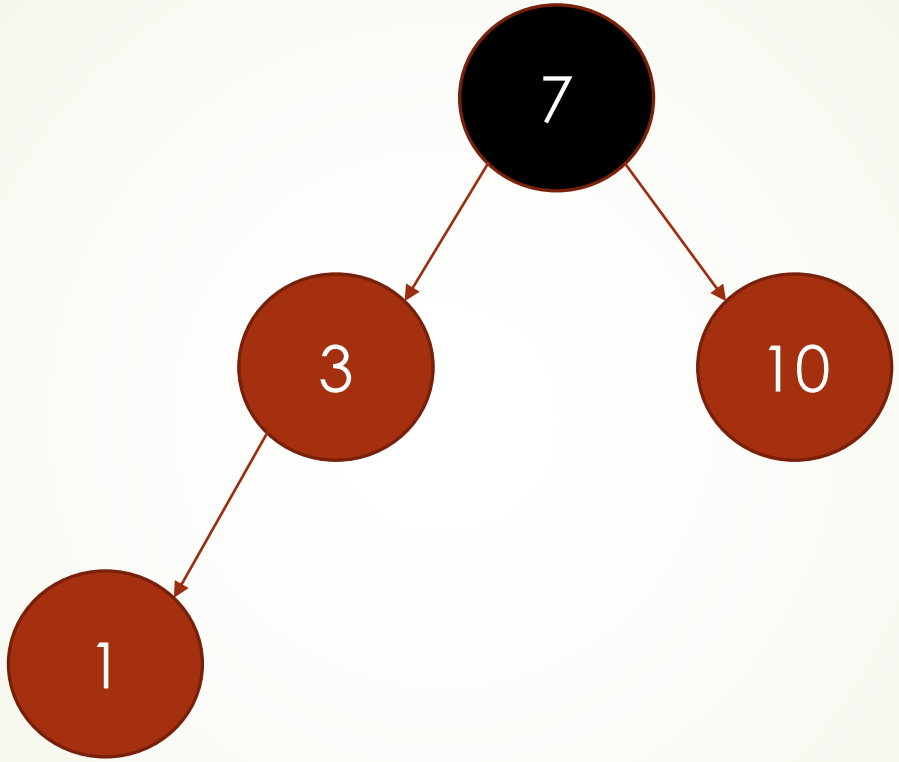
Пример



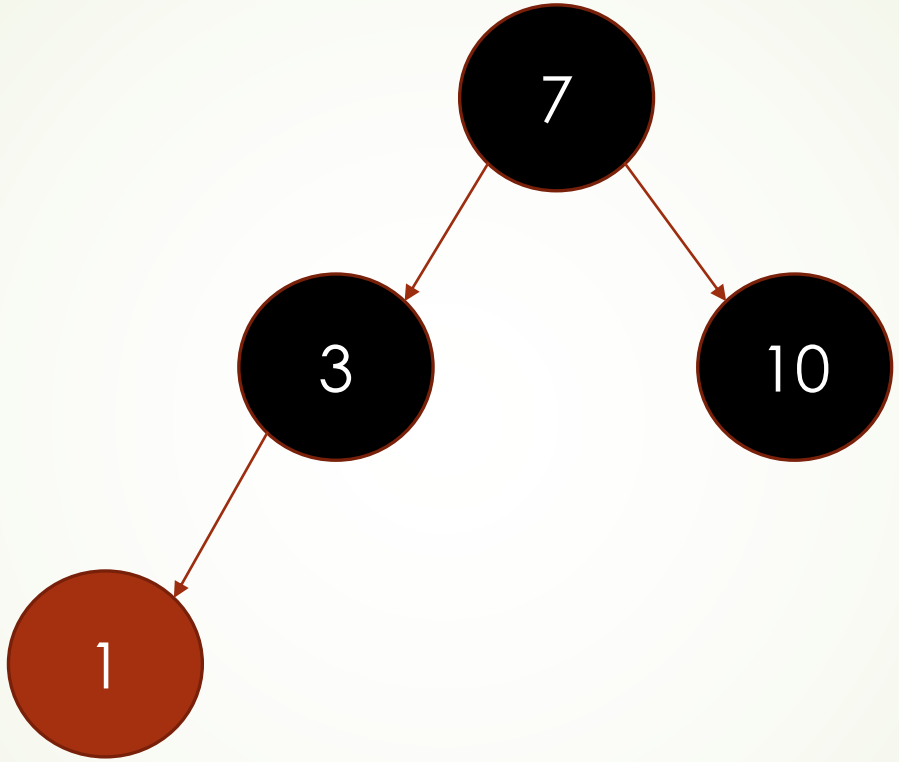
Операция с деревом – вставка

- Вставляем КРАСНЫЙ узел
- Если это первый узел – перекрашиваем в ЧЁРНЫЙ
- Если родитель узла ЧЁРНЫЙ – ОК
- Если родитель и дядя – КРАСНЫЕ, делаем их ЧЁРНЫМИ, а дедушку – КРАСНЫМ

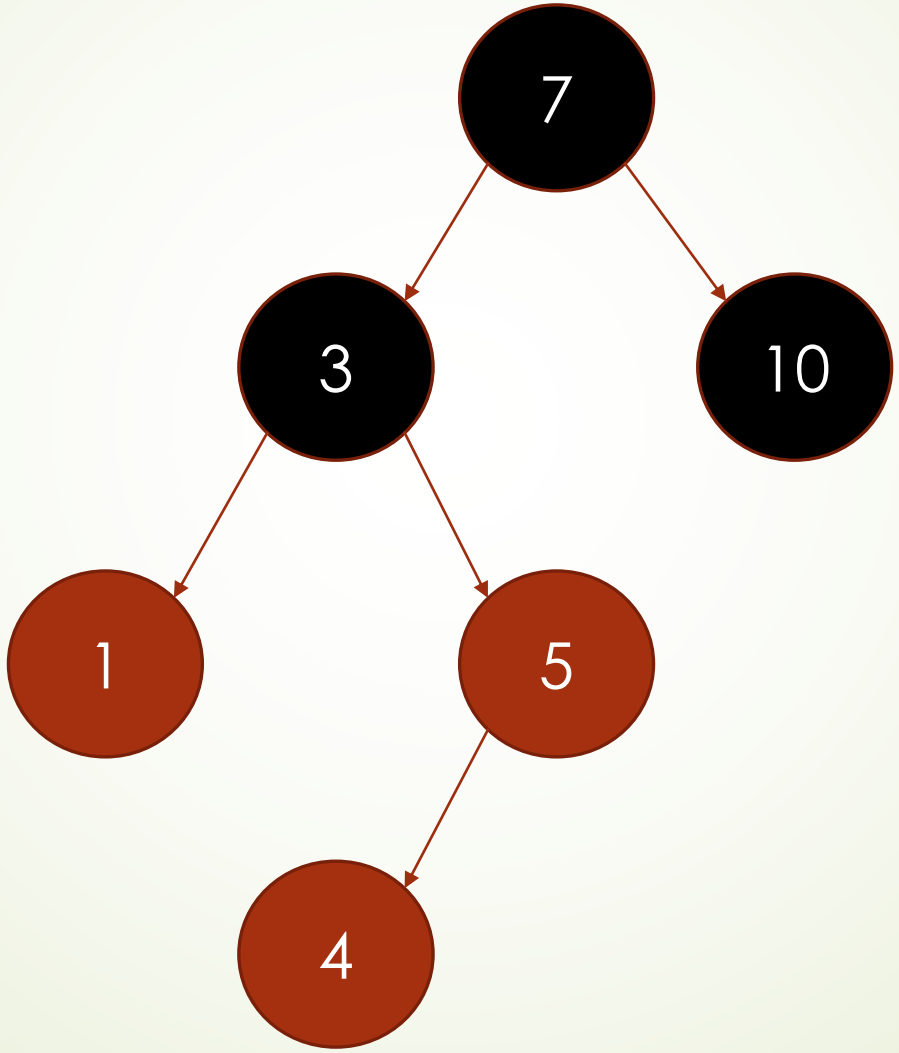
Пример 1 (родитель и дядя красные)



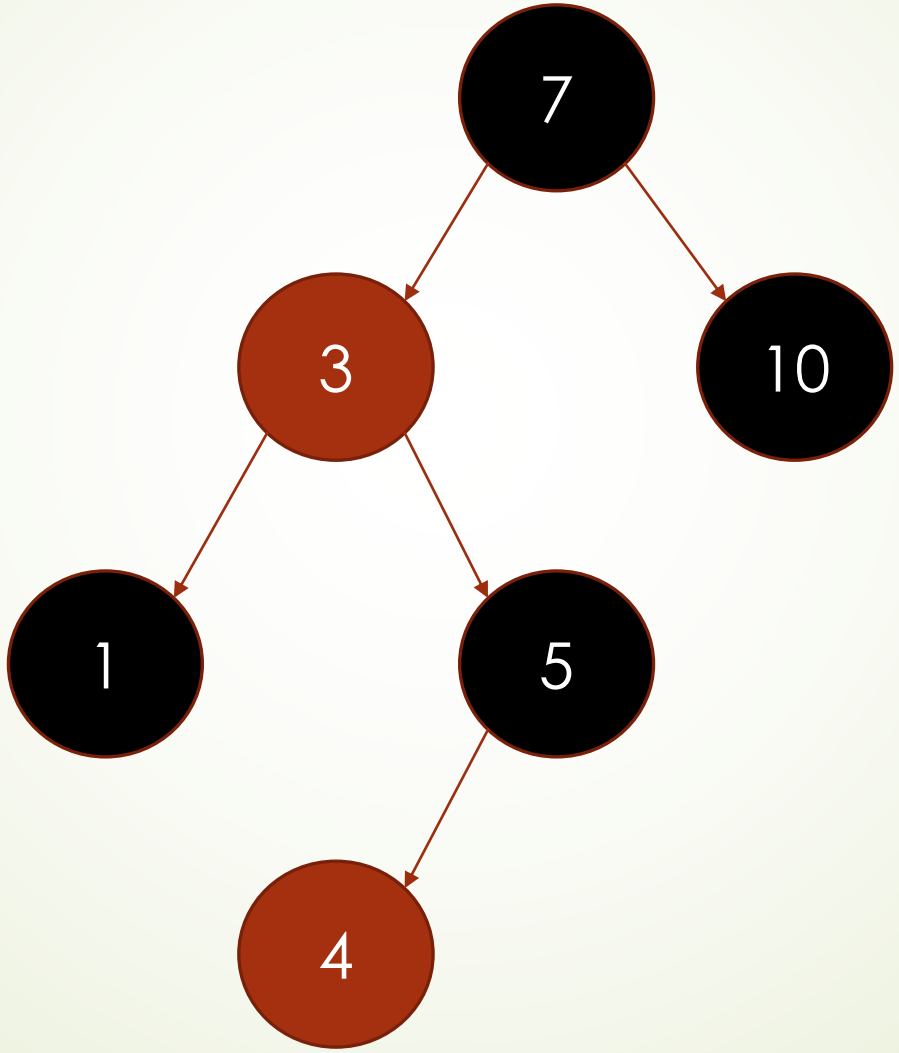
Пример 1 (родитель и дядя красные)



Пример 2 (родитель и дядя красные)



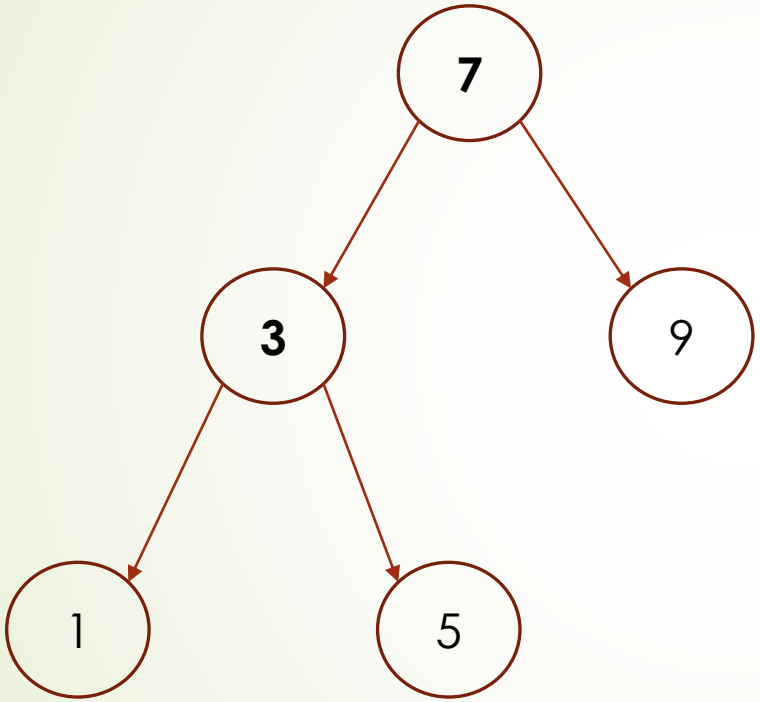
Пример 2 (родитель и дядя красные)



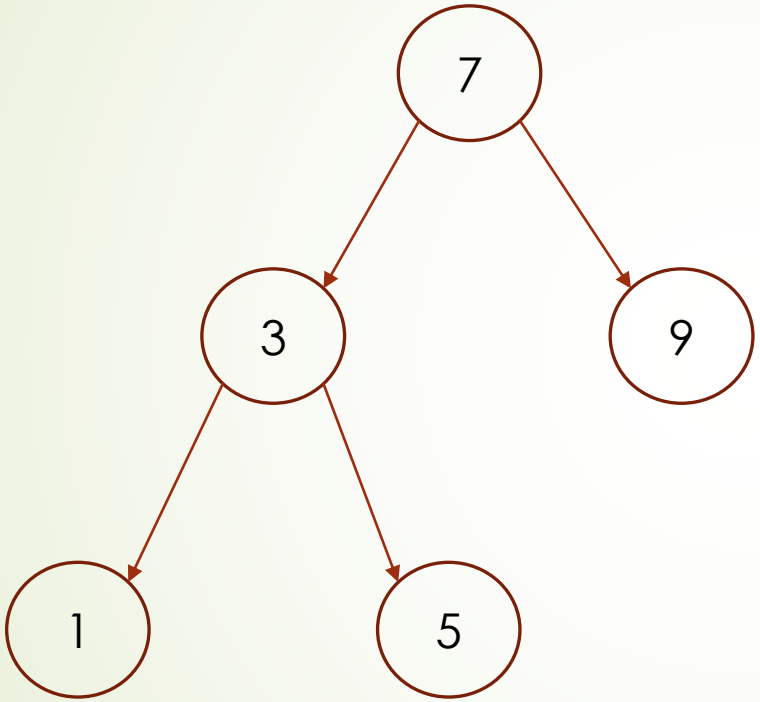
Операция с деревом – вставка

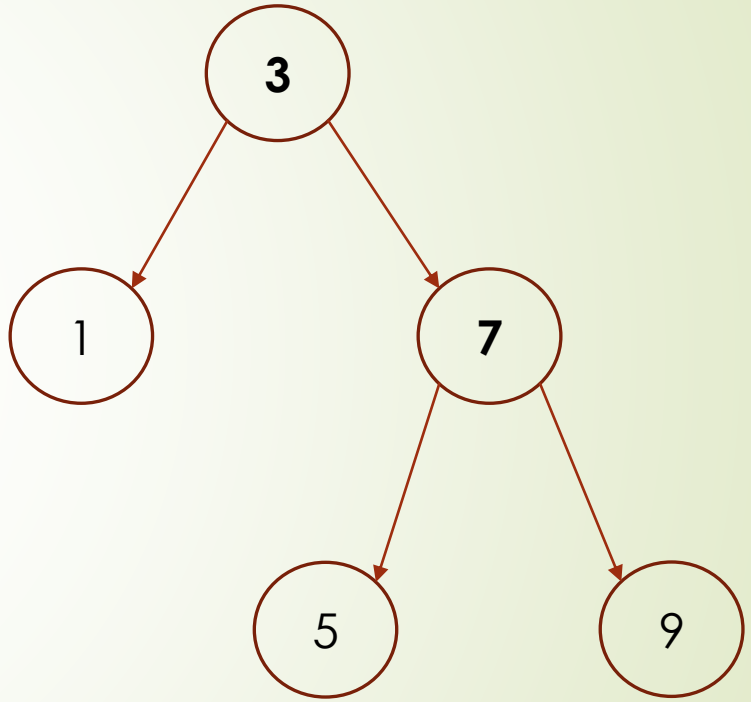
- Вставляем КРАСНЫЙ узел
- Если это первый узел – перекрашиваем в ЧЁРНЫЙ
- Если родитель узла ЧЁРНЫЙ – ОК
- Если родитель и дядя – КРАСНЫЕ, делаем их ЧЁРНЫМИ, а дедушку – КРАСНЫМ
- Родитель – КРАСНЫЙ, дядя – отсутствует -- повороты

Операция с деревом – поворот

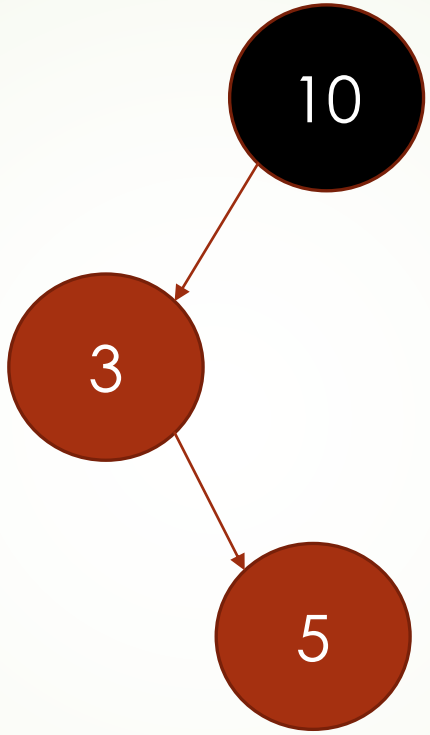


Операция с деревом – поворот

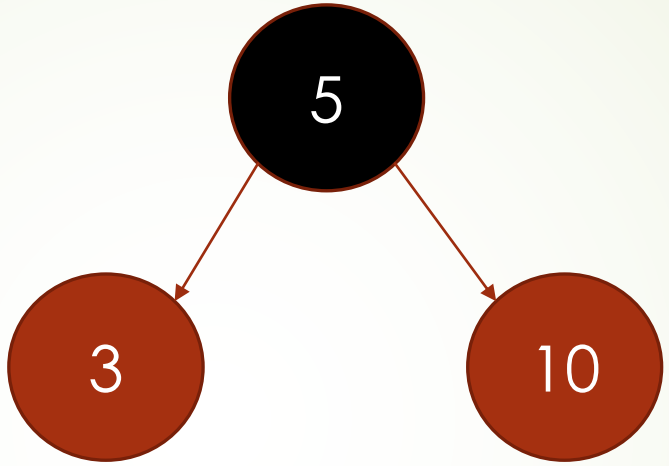




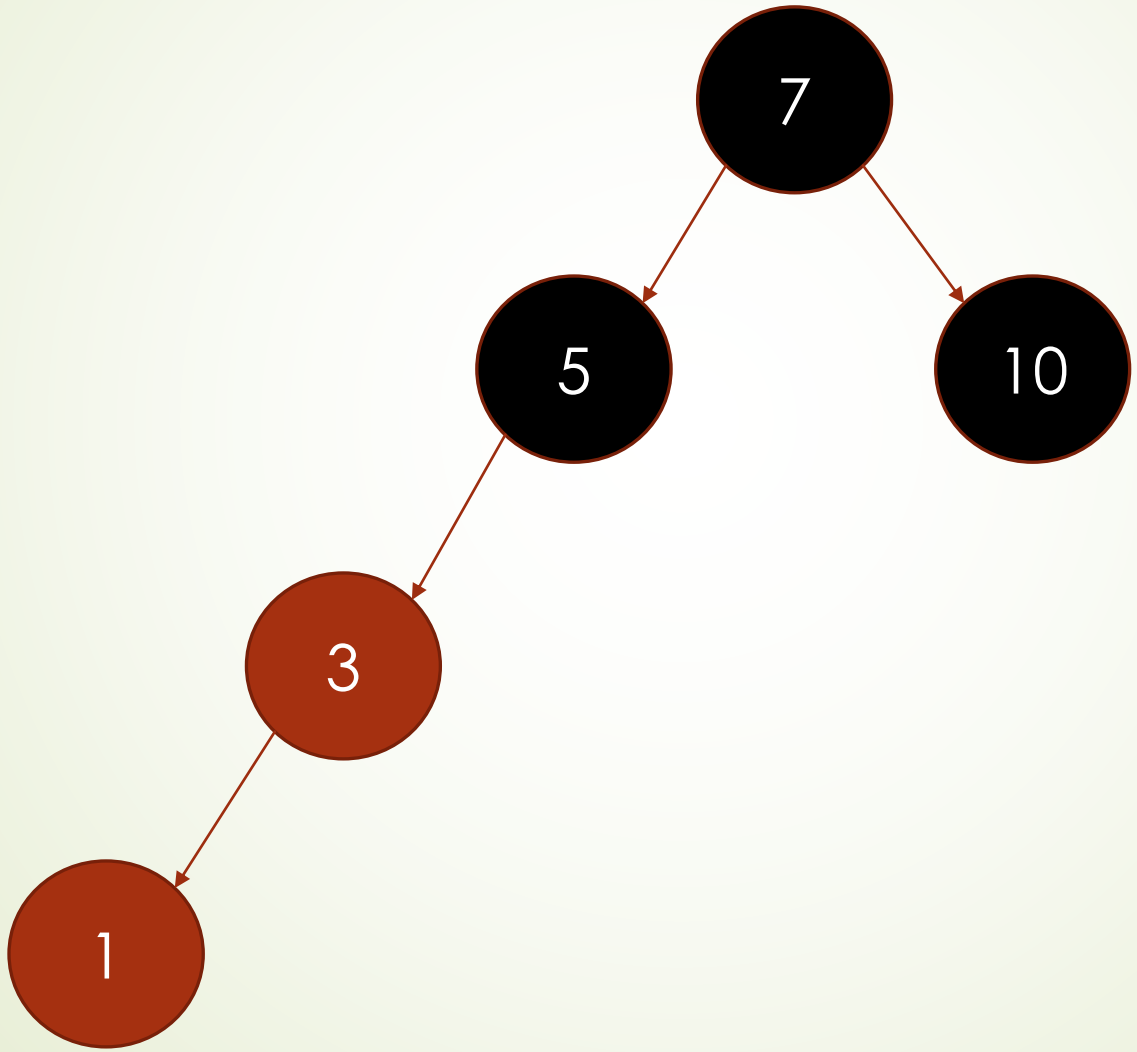
Пример 1 (родитель красный, дяди нет)



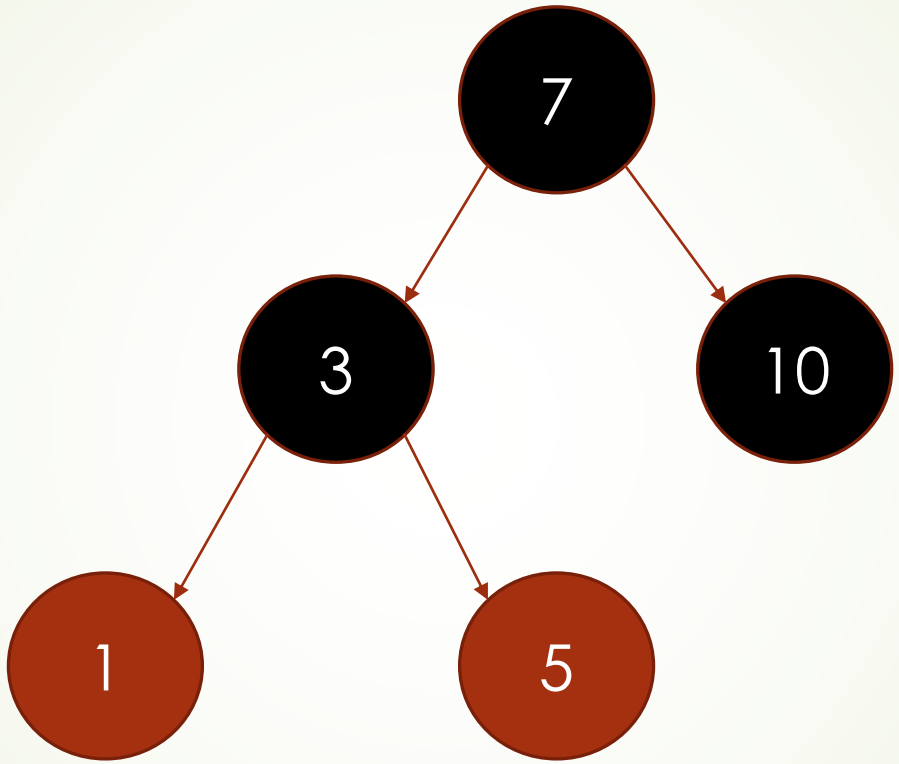
Пример 1 (родитель красный, дяди нет)



Пример 2 (родитель красный, дяди нет)



Пример 2 (родитель красный, дяди нет)



Красно-чёрные деревья

- Визуализация: https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/RedBlack.html

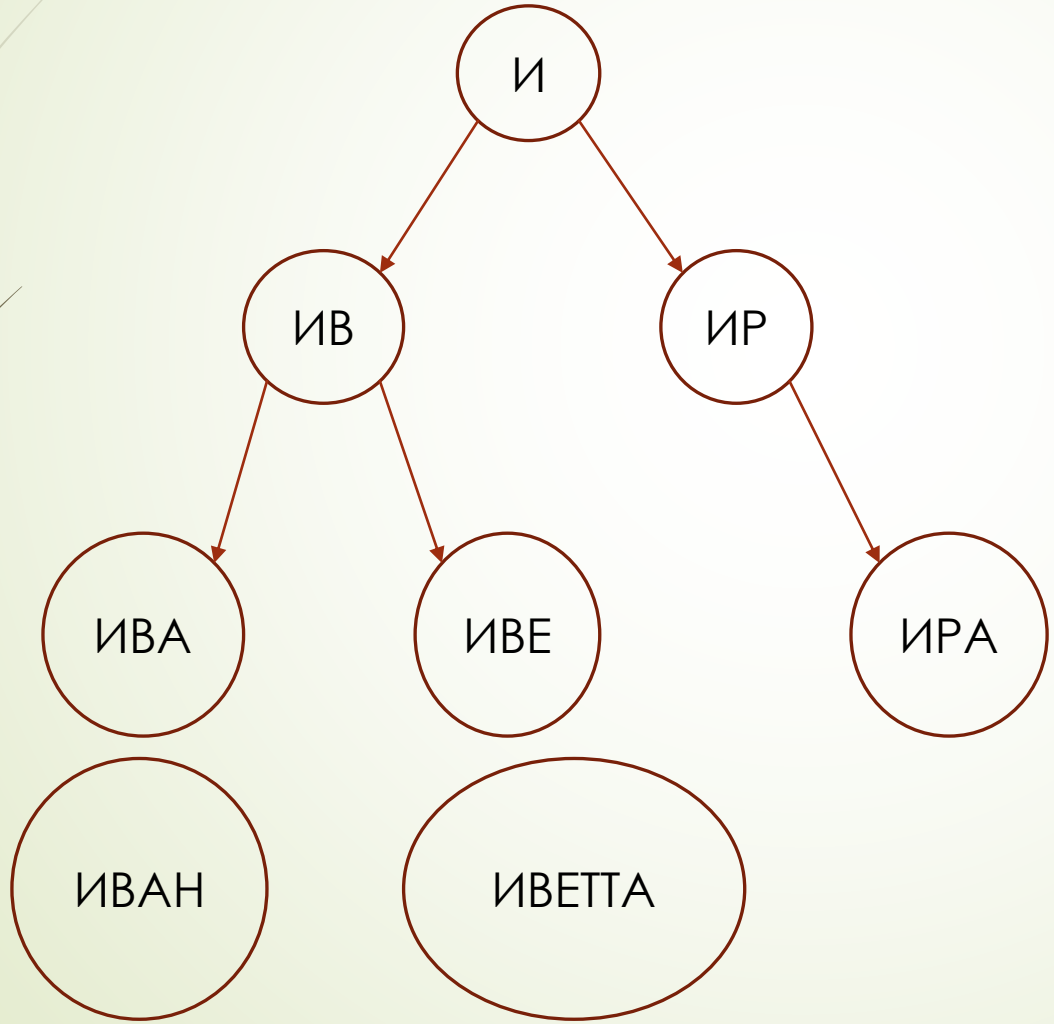
Возможный интерфейс красно-чёрного узла

```
public interface RBNode<T> {
    T getValue();
    default boolean isRed() {
        return true;
    }
    RBNode<T> getLeft();
    RBNode<T> getRight();
}
```

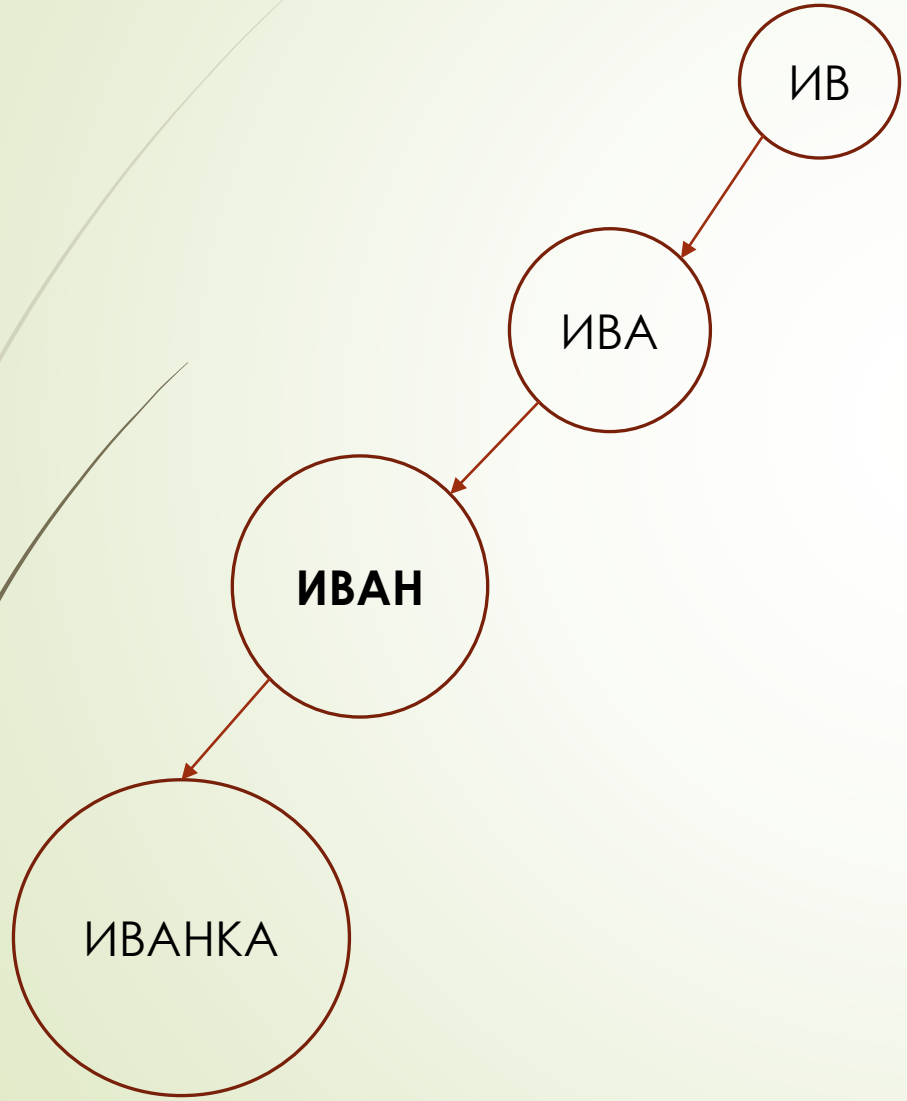
Другие сбалансированные деревья

- АВЛ-дерево
  - Высоты разных ветвей отличаются максимум на 1
- B-дерево
  - Каждая вершина содержит список узлов, и на одного потомка больше, чем есть в этом списке (то есть не бинарное, а N-арное)
- Splay-дерево
  - Само-балансируется через операции Splay (перемещение вершины в корень) = Split (разделение дерева на две части) + Merge (соединение двух деревьев)

Trie (префиксное дерево)



Trie (префиксное дерево)



Trie (операции)

- Как и раньше
  - Search
  - Insert
  - Delete
- Организация: TreeMap<Char, Node>
- Трудоёмкость операций (худший случай): O(maxLength * log(alphabet))

Trie (операции)

- Как и раньше
  - Search
  - Insert
  - Delete
- Организация: HashMap<Char, Node>
- Трудоёмкость операций (средний случай): O(maxLength)

Trie (применение)

- Префиксный поиск по словарю
- Поиск по строкам / спискам
- См. Trie в обучающем проекте (урок 4)

Итоги

- Рассмотрено
  - Бинарные деревья поиска
    - Красно-чёрные
    - АВЛ, B-деревья
  - Префиксные деревья
- Упражнения: урок 3 (бинарное дерево), урок 4 (префиксное дерево)
- Далее
  - Таблицы и хэш-таблицы