Алгоритмы и структуры данных

Лекция 2. Алгоритмы сортировки.

(c) Глухих Михаил Игоревич, glukhikh@mail.ru

Корректность алгоритма

- Output = Alg(Input)
- Математически
  - ЕСЛИ Precondition(Input), ТО Postcondition(Alg(Input))
  - ЕСЛИ Invariant(Input), ТО Invariant(Alg(Input))
- Как доказать корректность?

Пример: Алгоритмы сортировки

- Простые
  - вставками (включениями)
  - выбором
  - обменом (пузырьком)
- Сложные
  - слияниями
  - Хоара, или быстрая сортировка
  - двоичной кучей, или пирамидальная сортировка

Простые сортировки

- **Сортировка вставками**

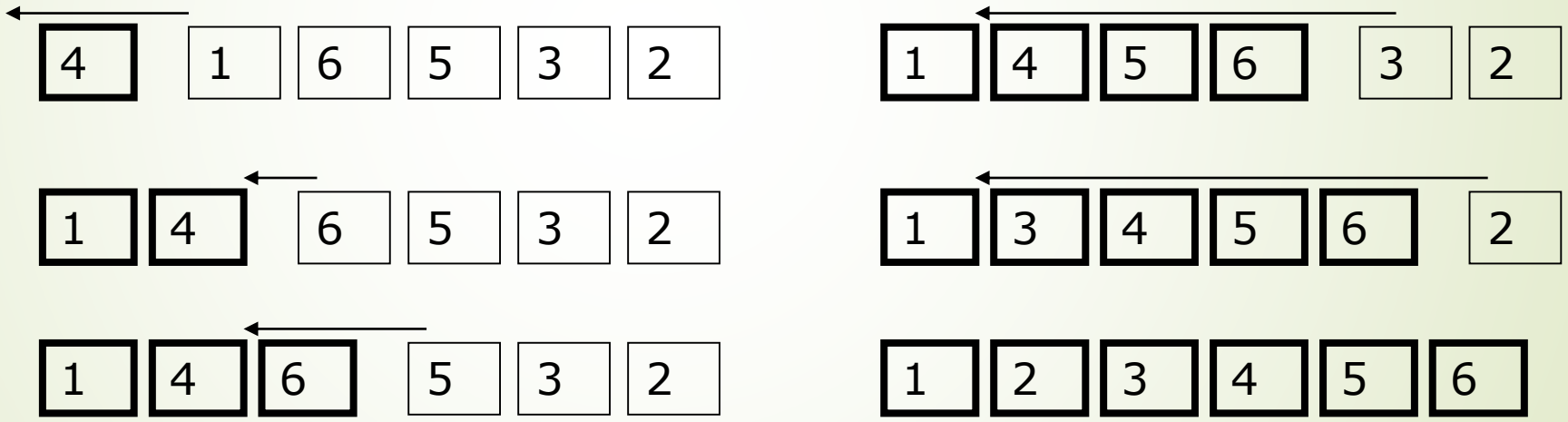
Пример: сортировка вставками

- Псевдокод

```
for j = 1 to list.size – 1:
    key = list[j]
    i = j – 1
    while i >= 0 && list[i] > key:
        list[i+1] = list[i]
        i--
    list[i+1] = key
```

Сортировка вставками

- На каждой итерации вставляем очередной элемент в отсортированную часть массива



Сортировка вставками: принцип рекуррентности

- Рекуррентный (индуктивный) алгоритм
  - База: 1 элемент всегда упорядочен

Сортировка вставками: принцип рекуррентности

- Рекуррентный (индуктивный) алгоритм
  - База: 1 элемент всегда упорядочен
  - Переход: от j-1 упорядочены к j упорядочены
    - Пусть j-1 элементов уже упорядочено
    - Берём элемент номер j
    - Находим среди j-1 элементов такую пару A[i] и A[i+1], что A[i] <= A[j] <= A[i+1];
      либо, если её нет, то одно из двух: A[j] <= A[0] или A[j-1] <= A[j]
    - Вставляем элемент номер j между этой парой

Сортировка вставками: принцип рекуррентности

- Рекуррентный (индуктивный) алгоритм
  - База: 1 элемент всегда упорядочен
  - Переход: от j-1 упорядочены к j упорядочены
    - Пусть j-1 элементов уже упорядочено
    - Берём элемент номер j
    - Находим среди j-1 элементов такую пару A[i] и A[i+1], что A[i] <= A[j] <= A[i+1];
      либо, если её нет, то одно из двух: A[j] <= A[0] или A[j-1] <= A[j]
    - Вставляем элемент номер j между этой парой
  - Результат: все N элементов упорядочены

Сортировка вставками: O(?)

- Пусть размер списка N

```
for j = 1 to list.size – 1:
    key = list[j]
    i = j – 1
    while i >= 0 && list[i] > key:
        list[i+1] = list[i]
        i--
    list[i+1] = key
```

Интересные вопросы про O(f(n))

- Что это такое?

Интересные вопросы про O(f(n))

- Что это такое?
- Верно ли, что:
  - O(n)+O(n)=2*O(n)
  - O(n)+O(n)=O(2*n)
  - O(n)+O(n)=O(n)

Интересные вопросы про O(f(n))

- Что это такое?
- Верно ли, что:
  - $O(n)+O(n)=2*O(n)$
  - $O(n)+O(n)=O(2*n)$
  - $O(n)+O(n)=O(n)$
  - $O(n)*O(n)=O^2(n)$
  - $O(n)*O(n)=O(n^2)$
  - $O(n)*O(n)=O(n)$

Математика: варианты оценки затрат

- f(n) = O(g(n)): существуют C и n0: при n>n0 f(n) < Cg(n)
  - ОЦЕНКА СВЕРХУ ~ РАСТЁТ МЕДЛЕННЕЕ

Математика: варианты оценки затрат

- $f(n) = O(g(n))$: существуют C и n0: при $n>n0$ $f(n) < Cg(n)$
  - ОЦЕНКА СВЕРХУ ~ РАСТЁТ МЕДЛЕННЕЕ
- $f(n) = \Omega(g(n))$: существуют C и n0: при $n>n0$ $f(n) > Cg(n)$
  - ОЦЕНКА СНИЗУ ~ РАСТЁТ БЫСТРЕЕ

Математика: варианты оценки затрат

- $f(n) = O(g(n))$: существуют C и n0: при $n>n0$ $f(n) < Cg(n)$
  - ОЦЕНКА СВЕРХУ ~ РАСТЁТ МЕДЛЕННЕЕ
- $f(n) = \Omega(g(n))$: существуют C и n0: при $n>n0$ $f(n) > Cg(n)$
  - ОЦЕНКА СНИЗУ ~ РАСТЁТ БЫСТРЕЕ
- $f(n) = \Theta(g(n))$: одновременно O и Ω
  - ОЦЕНКА С ДВУХ СТОРОН ~ РАСТЁТ С ТОЙ ЖЕ СКОРОСТЬЮ

Математика: варианты оценки затрат

- f(n) = O(g(n)): существуют C и n0: при n>n0 f(n) < Cg(n)
  - ОЦЕНКА СВЕРХУ ~ РАСТЁТ МЕДЛЕННЕЕ
- f(n) = Ω(g(n)): существуют C и n0: при n>n0 f(n) > Cg(n)
  - ОЦЕНКА СНИЗУ ~ РАСТЁТ БЫСТРЕЕ
- f(n) = Θ(g(n)): одновременно O и Ω
  - ОЦЕНКА С ДВУХ СТОРОН ~ РАСТЁТ С ТОЙ ЖЕ СКОРОСТЬЮ
- f(n) = o(g(n)): для любого (сколь угодно малого) коэффициента C существует n0: при n>n0...
  - РАСТЁТ ЗНАЧИТЕЛЬНО МЕДЛЕННЕЕ

Математика: варианты оценки затрат

- Программисты, как правило, используют O
  - Действительно, важна в первую очередь верхняя граница
  - Но найти её важно точно
    - и поэтому часто имеется в виду оценка с двух сторон (Θ)

Сортировка вставками: O(?)

- Пусть размер списка N

```
for j = 1 to list.size – 1:
    key = list[j]
    i = j – 1
    while i >= 0 && list[i] > key:
        list[i+1] = list[i]
        i--
    list[i+1] = key
```

Сортировка вставками: O(?)

- Пусть размер списка N

```
for j = 1 to list.size – 1:                  // N-1
    key = list[j]                            // N-1
    i = j – 1                                // N-1
    while i >= 0 && list[i] > key:           // N-1
        list[i+1] = list[i]  // 0..N(N-1)/2
        i--
    list[i+1] = key                          // N-1
```

Сортировка вставками: O(?)

- Пусть размер списка N

```
for j = 1 to list.size - 1:                  // N-1
    key = list[j]                            // N-1
    i = j - 1                                // N-1
    while i >= 0 && list[i] > key:           // N-1
        list[i+1] = list[i]  // 0..N(N-1)/2
        i--
    list[i+1] = key                          // N-1
```

- 5(N-1) … 5(N-1) + N(N-1)/2

Затраты времени

- В наихудшем случае (обычно важнее всего)

Затраты времени

- В наихудшем случае (обычно важнее всего)
- В среднем случае (важно, если наихудший случай происходит крайне редко)

Затраты времени

- В наихудшем случае (обычно важнее всего)
- В среднем случае (важно, если наихудший случай происходит крайне редко)
- В наилучшем случае (как правило, неважно)

Затраты времени

- В наихудшем случае (обычно важнее всего)
- В среднем случае (важно, если наихудший случай происходит крайне редко)
- В наилучшем случае (как правило, неважно)
- Каковы наилучший и наихудший случай для сортировки вставками?

Затраты времени

- В наихудшем случае (обычно важнее всего)
- В среднем случае (важно, если наихудший случай происходит крайне редко)
- В наилучшем случае (как правило, неважно)
- Каковы наилучший и наихудший случай для сортировки вставками?
- Как разработать алгоритм с минимальными затратами в наилучшем случае?

Основные характеристики алгоритмов сортировки

- Трудоёмкость T=O(…) – в среднем и худшем случае
- Ресурсоёмкость R=O(…)
  - Для R=O(1) говорят «сортировка на месте»

Основные характеристики алгоритмов сортировки

- Трудоёмкость T=O(…) – в среднем и худшем случае
- Ресурсоёмкость R=O(…)
  - Для R=O(1) говорят «сортировка на месте»
- Устойчивость – изменяется ли порядок равных элементов в списке
  - Бывает важна в некоторых случаях, например, при индексации баз данных
  - Точно неважна, если элемент – это только ключ сравнения
- Операции сравнения – используются или нет

Алгоритмы сортировки

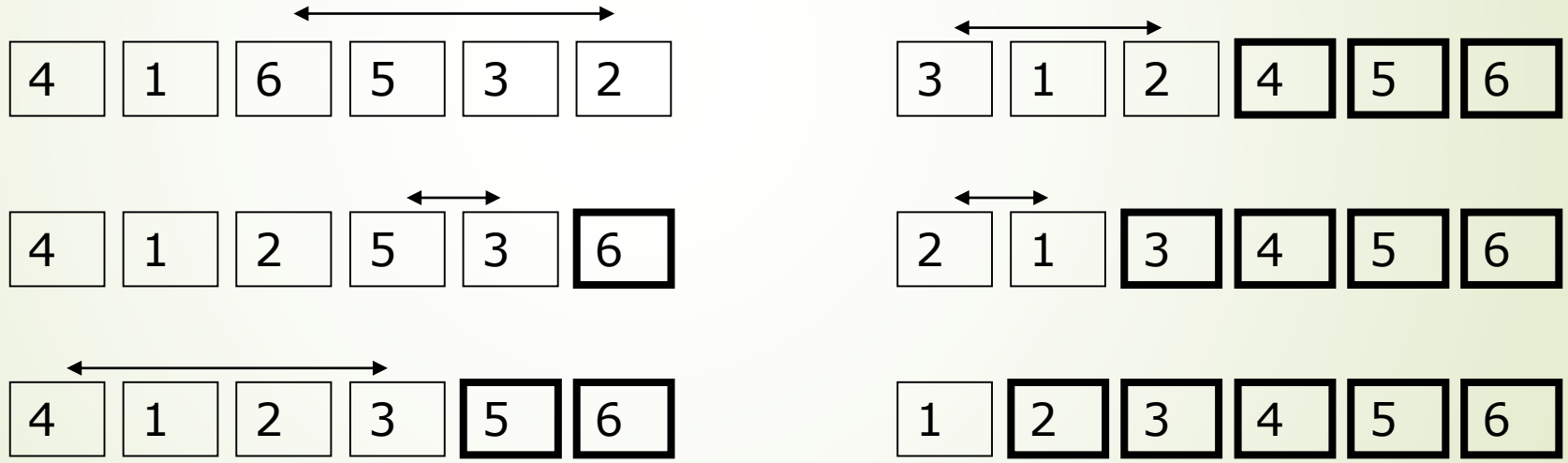
- Простые
  - $O(N^2)$, где N – число элементов
- Сложные
  - $O(N\log_2 N)$, где N – число элементов; для больших значений N существенно быстрее простых методов

Простые сортировки

- Сортировка вставками
- **Сортировка выбором**

Простые алгоритмы сортировки

- Сортировка **выбором** – на каждой итерации находим максимальный элемент и меняем с последним

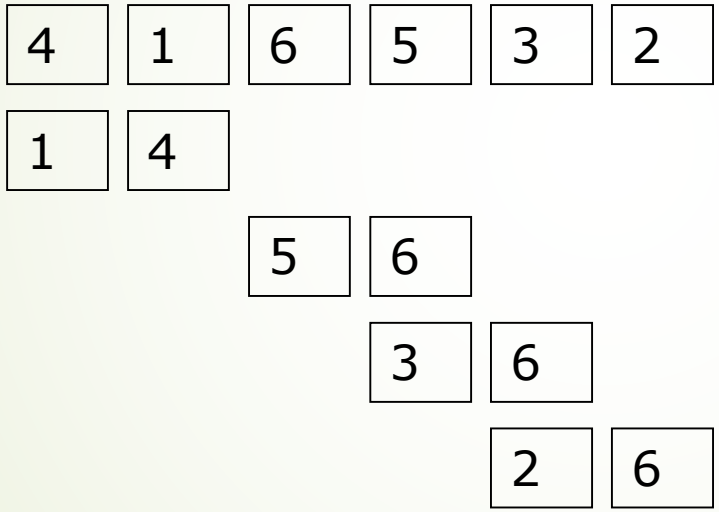


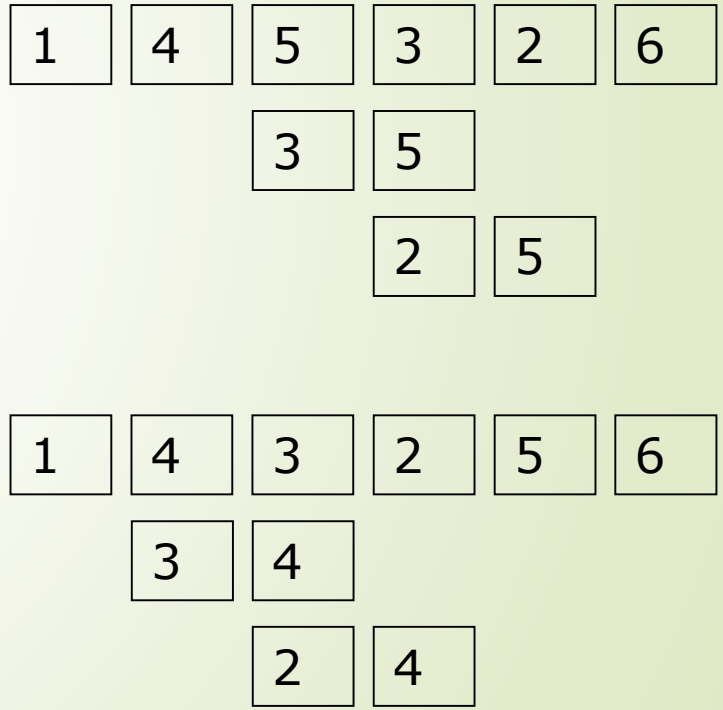
Простые сортировки

- Сортировка вставками
- Сортировка выбором
- **Сортировка обменом (пузырьком)**

Простые алгоритмы сортировки

- Сортировка **обменом** – последовательно меняем местами элементы в паре, если их порядок неверен





Устойчивые сортировки

- Пузырьком $T=O(N^2)$, $R=O(1)$
- Вставками $T=O(N^2)$, $R=O(1)$

Неустойчивые сортировки

- Выбором $T=O(N^2)$, $R=O(1)$
  - Этот алгоритм уже на первом шаге меняет местами минимальный элемент в списке с первым, что и приводит к неустойчивости
  - Пример: (2A, 2B, 1) → (1, 2B, 2A) (считаем 2A == 2B)

Сложные сортировки

- **Сортировка слиянием**

Принцип декомпозиции

- Или “Разделяй и властвуй”
  - Рекурсивный подход
- Разделение
  - Задача делится на k меньших частей (часто на две)
- Властвование
  - Каждая из частей решается отдельно (если требуется, таким же образом, как и первая)
- Комбинирование
  - Затем результаты объединяются

Сортировка слиянием: принцип

- Разделение
  - Делим n элементов на левую и правую половину
- Властвование
  - Упорядочиваем каждую половину отдельно
- Комбинирование
  - Составляем две половины вместе

Пример: сортировка слиянием

- Псевдокод комбинирования (left, right → list)

```
li = 0
ri = 0
for i = 0 to list.size - 1:
    if left[li] <= right[ri]: // ~~~ IOBE
        list[i] = left[li++]
    else:
        list[i] = right[ri++]
```

Сортировка слиянием: O(?)

- Псевдокод

```
sort(list, p = 0, q = list.size): // S(N)
    m = (p + q) / 2                // 1
    sort(list, p, m)               // S(N/2)
    sort(list, m, q)               // S(N/2)
    merge(list, p, m, q)           // 5N
```

Сортировка слиянием: O(?)

- Псевдокод

```
sort(list, p = 0, q = list.size): // S(N)
    m = (p + q) / 2                // 1
    sort(list, p, m)               // S(N/2)
    sort(list, m, q)               // S(N/2)
    merge(list, p, m, q)           // 5N
```

Сортировка слиянием: O(?)

- Псевдокод

```
sort(list, p = 0, q = list.size): // S(N)
    m = (p + q) / 2                // 1
    sort(list, p, m)               // S(N/2)
    sort(list, m, q)               // S(N/2)
    merge(list, p, m, q)           // 5N
```

- $S(N) = 2S(N/2)+5N+1$
  - Верно ли: $O(N) = 2O(N/2)+5N+1 = O(N)+O(N) = O(N)$?

Сортировка слиянием: O(?)

- Псевдокод

```
sort(list, p = 0, q = list.size): // S(N)
    m = (p + q) / 2                // 1
    sort(list, p, m)               // S(N/2)
    sort(list, m, q)               // S(N/2)
    merge(list, p, m, q)           // 5N
```

- $S(N) = 2S(N/2)+5N+1$
  - Верно ли: $O(N) = 2O(N/2)+5N+1 = O(N)+O(N) = O(N)$?
  - А так: $S(N) = 2S(N/2) + O(N)$?

Сортировка слиянием: O(?)

- Псевдокод

```
sort(list, p = 0, q = list.size): // S(N)
    m = (p + q) / 2                // 1
    sort(list, p, m)               // S(N/2)
    sort(list, m, q)               // S(N/2)
    merge(list, p, m, q)           // 5N
```

- $S(N) = 2S(N/2)+5N+1$
  - Верно ли: $O(N) = 2O(N/2)+5N+1 = O(N)+O(N) = O(N)$?
  - А так: $S(N) = 2S(N/2) + O(N)$?
  - Как насчёт наилучшего и наихудшего варианта?

Как решать (проверять): принцип

- Рекуррентное соотношение
  - $S(N) = 2S(N/2) + O(N)$

Как решать (проверять): принцип

- Рекуррентное соотношение
  - $S(N) = 2S(N/2) + O(N)$
- Предположим: $S(N) = O(N) \sim C * N$
  - $C * N = 2C * N/2 + D * N = C * N + D * N$
  - НЕВЕРНО

Как решать (проверять): принцип

- Рекуррентное соотношение
  - $S(N) = 2S(N/2) + O(N)$
- Предположим: $S(N) = O(N) \sim C * N$
  - $C * N = 2C * N/2 + D * N = C * N + D * N$
  - НЕВЕРНО
- Предположим: $S(N) = O(N^2) \sim C * N^2$
  - $C * N^2 = 2C * N^2/4 + D * N = C * N^2/2 + D * N$
  - НЕВЕРНО

Как решать (проверять): принцип

- Рекуррентное соотношение
  - $S(N) = 2S(N/2) + O(N)$
- Предположим: $S(N) = O(N) \sim C * N$
  - $C * N = 2C * N/2 + D * N = C * N + D * N$
  - НЕВЕРНО
- Предположим: $S(N) = O(N^2) \sim C * N^2$
  - $C * N^2 = 2C * N^2/4 + D * N = C * N^2/2 + D * N$
  - НЕВЕРНО
- Предположим: $S(N) = O(NlgN) \sim C * NlgN$
  - $C * NlgN = 2C * Nlg(N/2) / 2 + D * N = C * NlgN - C * Nlg2 + D * N$
  - ВЕРНО

Сложные сортировки

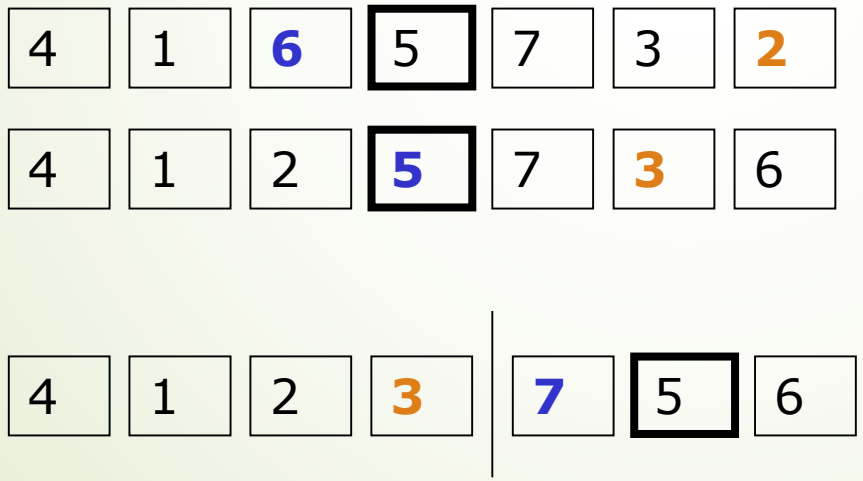
- Сортировка слиянием
- **Быстрая сортировка (сортировка Хоара)**

Быстрая сортировка

- Используется принцип декомпозиции «Разделяй и Властвуй»
- На каждом шаге массив A[Min…Max] путём перестановки элементов разбивается на два подмассива A[Min…R] и A[R+1…Max], таких, что
  - A[J] <= A[R] для J <= R
  - A[J] >= A[R] для J > R
- Каждый из подмассивов сортируется рекурсивно

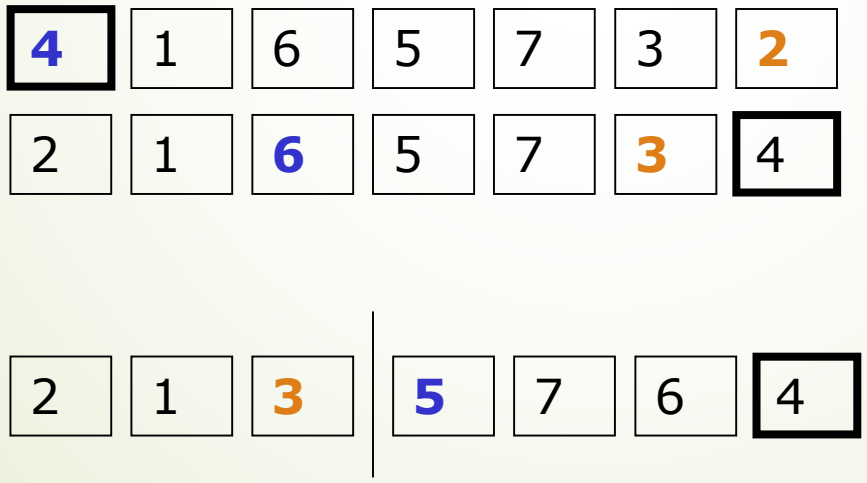
Сортировка Хоара

- На каждом шаге алгоритма выбирается **разделяющий элемент** массива (в идеале – его **медиана**), после чего элементы переставляются так, чтобы меньшие оказались слева, а большие – справа



Сортировка Хоара

- На каждом шаге алгоритма выбирается **разделяющий элемент** массива (в идеале – его **медиана**), после чего элементы переставляются так, чтобы меньшие оказались слева, а большие – справа



Псевдокод: разбиение

```
PARTITION(A, Min, Max):
  X = A[RANDOM(Min, Max)]
  L=Min, R=Max
  while L <= R:
    while A[L] < X:
      L++
    while A[R] > X:
      R--
    if (L <= R):
      Swap A[L] with A[R]
      L++, R--
```

- Инвариант: в начале каждой итерации элементы #Min…#L-1 <= X, #R+1…#Max >= X

Псевдокод: быстрая сортировка

```
QUICK-SORT(A, Min, Max):
  if (Min < Max):
    R = PARTITION(A, Min, Max)
    QUICK-SORT(A, Min, R)
    QUICK-SORT(A, R+1, MAX)
```

Производительность быстрой сортировки

- Наихудший случай: R == Min или R == Max
  - T(N) = T(N-1) + O(N)
- Наилучший случай: R == (Min + Max) / 2
  - T(N) = 2T(N/2) + O(N)
- 20 / 80: R = 0.2Min + 0.8Max
  - T(N) = T(0.8N) + T(0.2N) + O(N)
- «Средний» ~ чередование наилучшего и наихудшего

Сложные сортировки

- Сортировка слиянием
- Быстрая сортировка (сортировка Хоара)
- **Пирамидальная сортировка**

Итоги

- Рассмотрели наиболее распространённые виды сортировок
- Далее
  - Прочие виды сортировок
  - Задачи на построение алгоритмов