Нестандартные (нетрадиционные) формы представления чисел

Троичная система счисления

Позиционная система счисления с целочисленным основанием, равным 3. Существует в двух вариантах: несимметричная и симметричная.

В несимметричной троичной системе счисления чаще применяются цифры {0,1,2}, а в троичной симметричной системе счисления знаки {−, 0, +}, {−1, 0, +1}, {$\bar{1}$,0,1}, {$\underline{1}$,0,1}, {i,0,1}, {N, O, P}, {N, Z, P} и цифры {2,0,1}, {7,0,1}. Троичные цифры можно обозначать любыми тремя знаками {A, B, C}, но при этом дополнительно нужно указать старшинство знаков, например, C> B, B> A.

При поразрядном сравнении троичная система счисления оказывается более ёмкой, чем двоичная система счисления.

При девяти разрядах двоичный код имеет ёмкость $2^9 = 512$ чисел, а троичный код имеет ёмкость $3^9 = 19683$ числа, то есть в $3^9/2^9 = 38,4$ раза больше.

Позиционная целочисленная симметричная троичная система счисления была предложена итальянским математиком Фибоначчи (Леонардо Пизанский) (1170—1250) для решения «задачи о гирях».

Десятичная система	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Троичная несимметричная	−100	−22	−21	−20	−12	−11	−10	−2	−1	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100
Троичная симметричная	$\bar{1}00$	$\bar{1}01$	$\bar{1}1\bar{1}$	$\bar{1}10$	$\bar{1}11$	$\overline{11}$	0	$\bar{1}1$	$\bar{1}$	0	1	$1\bar{1}$	10	11	$1\overline{11}$	$1\bar{1}0$	$1\bar{1}1$	$10\bar{1}$	100

В троичной симметричной системе счисления знак $\bar{1}$ можно заменить знаком (не числом) i или 2, а также использовать для троичной симметричной системы счисления знаки {-1, 0, +1} или знаки троичной несимметричной системы {2,0,1}.

Свойства

Благодаря тому, что основание 3 нечётно, в троичной системе возможно симметричное относительно нуля расположение цифр: −1, 0, 1, с которым связано шесть ценных свойств:

- Естественность представления отрицательных чисел;
- Отсутствие проблемы округления: обнуление ненужных младших разрядов *округляет* — приближает число к ближайшему «грубому».
- Таблица умножения в этой системе примерно в четыре раза короче, чем в десятичной системе.
- Для изменения знака представляемого числа нужно изменить ненулевые цифры на симметричные.
- При суммировании большого количества чисел значение для переноса в следующий разряд растёт с увеличением количества слагаемых не линейно, а пропорционально квадратному корню числа слагаемых.
- По затратам количества знаков на представление чисел она равна троичной несимметричной системе.

«Фибоначчиевые» системы счисления

(Использованы материалы из Википедии — свободной энциклопедии)

Существует обоснование (доказательство), что с помощью p-чисел Фибоначчи можно представить натуральное число N в виде:

$N = a_{n-1}\,\varphi_p(n-1) + a_{n-2}\,\varphi_p(n-2) + \ldots + a_0\,\varphi_p(0)$,

где $a_l \in \{0,1\}$ – двоичная цифра в l-м разряде кода; $\varphi_p(l)$ – вес l-го разряда, вычисляемый по рекуррентной формуле

$\varphi_p(n) = 0$ при $n<0$;

$\varphi_p(n) = 1$ при $n=0$;

$\varphi_p(n) = \varphi_p(n-1) + \varphi_p(n-p-1)$ при $n>0$, $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Коды золотой пропорции

Под "кодами золотой p-пропорции" понимается способ позиционного представления действительного числа, когда оно представляется в виде суммы степеней золотой p-пропорции τ_p с двоичными коэффициентами {0, 1}.

Такой способ "двоичного" представления действительных чисел является "естественным" обобщением классического двоичного представления (p = 0); при p = 1 код золотой p-пропорции "вырождается" в "Тау-систему", предложенную в 1957 г. американским математиком Бергманом. Наконец, при p = ∞ код золотой p-пропорции "вырождается" в евклидово представление числа.

Коды золотой p-пропорции	$A = \sum_i a_i \tau_p^i$, $a_i \in \{0, 1\}$ - двоичная цифра i-го разряда $\tau_p^i = \tau_p^{i-1} + \tau_p^{i-p-1}$ $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$
p = 0 **двоичный код**	$A = \sum_i a_i 2^i$,
p = 1 **система счисления Бергмана (1957)**	$A = \sum_i a_i \tau^i$ $\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}$
p = ∞ **"унитарный" код ("Представление Евклида")**	$N = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{N}$

Для выполнения арифметических операций в кодах золотой p-пропорции была разработана соответствующая "золотая" арифметика, которая затем была реализована в виде устройств, представленных для патентования. Теория кодов золотой пропорции и "золотой" арифметики изложена в книге "Коды золотой пропорции" (М., 1984)

Наименование кодовой комбинации	Веса разрядов					Представляемое десятичное число
	5	3	2	1	1	
A_0	0	0	0	0	0	0
A_1	0	0	0	0	1	1
A_2	0	0	0	1	0	1
A_3	0	0	0	1	1	2
A_4	0	0	1	0	0	2
A_5	0	0	1	0	1	3
A_6	0	0	1	1	0	3
A_7	0	0	1	1	1	4
A_8	0	1	0	0	0	3
. . .						
A_{17}	1	0	0	0	1	6
A_{18}	1	0	0	1	0	6
A_{19}	1	0	0	1	1	7
. . .						
A_{28}	1	1	1	0	0	10
A_{29}	1	1	1	0	1	11
A_{30}	1	1	1	1	0	11
A_{31}	1	1	1	1	1	12

Золотое сечение (золотая пропорция, деление в крайнем и среднем отношении, гармоническое деление) — соотношение двух величин a и b, b > a, когда справедливо b/a = (a+b)/b. Число, равное отношению b/a, обычно обозначается греческой буквой φ, реже — греческой буквой τ. Из исходного равенства нетрудно получить, что число

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Обратное число

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

.

Число φ называется также **золотым числом**.

Математические свойства.

φ — иррациональное алгебраическое число, положительное решение квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, откуда, в частности, следуют соотношения:

$$\varphi^2 - \varphi = 1,$$
$$\varphi \cdot (\varphi - 1) = 1,$$

φ — представляется через тригонометрические функции:

$$\varphi = 2\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos 36^\circ.$$
$$\varphi = 2\sin(3\pi/10) = 2\sin 54^\circ.$$

φ представляется в виде бесконечной цепочки квадратных корней:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}.$$

φ представляется в виде бесконечной цепной дроби

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}},$$

подходящими дробями которой служат отношения последовательных чисел Фибоначчи $\frac{F_{n+1}}{F_n}$. Таким образом,

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Существует обоснование (доказательство), что с помощью «золотого числа» можно представить действительное число А в виде:

$A = a_{n-1}\,\varphi^{n-1} + a_{n-2}\,\varphi^{n-2} + \ldots + a_0\,\varphi^0 + a_{-1}\,\varphi^{-1} + a_{-2}\,\varphi^{-2} + \ldots,$

Такой способ представления действительных чисел впервые был предложен Джорджем Бергманом в 1957 оду и назван им системой счисления с иррациональным основанием типа золотой пропорции.

Система остаточных классов

(Использованы материалы из Википедии — свободной энциклопедии)

Система остаточных классов (СОК) (от англ. *Residue number system*, другое название **Модулярная арифметика**) — непозиционная система счисления. Представление числа в системе остаточных классов основано на понятии остатка от деления (вычета) и китайской теореме об остатках. СОК определяется набором взаимно простых *модулей* ($m_1, m_2, \ldots, m_n$), называемых базисом, с произведением $M = m_1 * m_2 * \ldots * m_n$ так, что каждому целому числу x из отрезка [0, M-1] ставится в соответствие набор остатков ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), где

$$x_1 \equiv x \pmod{m_1};$$
$$x_2 \equiv x \pmod{m_2};$$
$$\ldots$$
$$x_n \equiv x \pmod{m_n}.$$

При этом китайская теорема об остатках гарантирует однозначность представления для чисел из отрезка [0, M-1].

Преимущества СОК

В СОК арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление) выполняются покомпонентно, если про результат известно, что он является целочисленным и также лежит в [0, M-1].

Формула для сложения: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, где

$$z_1 \equiv (x_1 + y_1) \pmod{m_1};$$
$$z_2 \equiv (x_2 + y_2) \pmod{m_2};$$
$$\ldots$$
$$z_n \equiv (x_n + y_n) \pmod{m_n};$$

Аналогично выполняются вычитание, умножение и деление.

Недостатки СОК

1) Возможность представления только ограниченного количества чисел.
2) Отсутствие эффективных алгоритмов для сравнения чисел, представленных в СОК. Сравнение обычно осуществляется через перевод аргументов из СОК в смешанную систему счисления по основаниям $(m_1, m_1 \cdot m_2, \ldots, m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_{n-1})$.
3) Медленные и требующие работы с большими числами реализации алгоритмов перевода из позиционной системы счисления в СОК и обратно.
4) Сложные алгоритмы деления (для случая, когда результат не является целым)
5) Трудность в обнаружении переполнения

СОК широко ***используется*** в микроэлектронике в специализированных устройствах ЦОС, где требуется:

1) контроль за ошибками, за счет введения дополнительных избыточных модулей
2) высокая скорость работы, которую обеспечивает параллельная реализация базовых арифметических операций
3) информационная безопасность

Логарифмическая форма

$$A \equiv n^{q} \log_{a} M,$$

где n – основание (например, 2); q – порядок числа; a – основание представления мантиссы; M – мантисса.

Основное достоинство – просто и очень быстро (без ухищрений) выполняются операции умножения и деления. Применяется в специализированных ЭВМ.

Трансформирующаяся запятая

Число A при вводе в ЭВМ подвергается преобразованию:

$$U = \frac{kA}{1+|A|}, \ 0<k<1$$

Тогда:

$$-k < U < k$$

Такая форма позволяет имитировать нормальную форму представления в ЭВМ, в которой принята естественная форма.

По данным литературы объем программ, определяющих этот режим работы сокращается примерно в 3 раза. (На скорости это не сказывается. Человеком воспринимается очень трудно).

Инверсная запятая

Число A при вводе представляется:

$$U = [f_1(A)]^{f_2 A}, \text{ где}$$

$f_1(A) = A$, $f_2(A) = +1$ при $|A| < 1$;

$f_1(A) = \dfrac{1}{A}$, $f_2 = -1$ при $|A| \geq 1$

Внимание!

Помимо кратко описанных выше существуют и другие системы счисления (позиционные и непозиционные), которые можно использовать в вычислительной технике.

Ограничимся упоминанием некоторых из них:

Факториальная система счисления (смешанная).

Нега-позиционные системы счисления (позиционные с отрицательными основаниями).

Системы счисления с **нецелочисленными** и с **комплексными основаниями**.

Биномиальная система счисления.

Система счисления **Штерна-Брока**.

• • •