Тезис Чёрча (Churh's thesis)

Чтобы хоть как-то осознать строгий математический подход к формальному описанию тезиса Чёрча попробуйте уяснить несколько определений:

1.

Простые основные понятия. Пусть X, Y – два множества. Частичной функцией (или отображением) из X в Y будем называть любую пару {D(f), f}, состоящую из подмножества $D(f) \subseteq X$ и отображения $f: D(f) \to Y$. Здесь D(f) называется областью определения f; f определена в точке $x \in X$, если $x \in D(f)$; f нигде не определена если D(f) пусто; существует единственная нигде не определённая частичная функция.

Через $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ обозначим множество натуральных чисел. Если $n \geq 1$, через $(Z^+)^n$ условимся обозначать n-кратное прямое произведение Z^+ на себя, т.е. множество упорядоченных n-наборов $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, $x_i \in Z^+$. Основным объектом определения будут «целочисленные» частичные функции $(Z^+)^m$ в $(Z^+)^n$ для различных m, n.

В следующей далее классификации этих функций по степени их вычислимости под словом «программа» вы можете представлять себе программу для универсальной вычислительной машины (компьютера), написанную без учёта ограничений на время и память. Для простоты подразумевается, что каждая такая программа для вычисления функции содержит специальное «пустое место» для вставки очередного значения аргумента.

2.

Основные определения.

2.1. Частичная функция f из $(Z^+)^m$ в $(Z^+)^n$ называется **вычислимой**, если существует такая «программа», что при подаче на её вход вектора $x \in (Z^+)^m$ на выходе будет получена f(x), если $x \in D(f)$, либо O, если $x \notin D(f)$. (Здесь символ O - указатель того, что f не определена, т.е. вычисление не производится).

2.2. Частичная функция f из $(Z^+)^m$ в $(Z^+)^n$ называется **полувычислимой**, если существует такая «программа», что при подаче на её вход вектора $x \in (Z^+)^m$ на выходе будет получена f(x), если $x \in D(f)$, либо получаем на выходе O или же программа работает бесконечно долго, если $x \notin D(f)$.

(Для математических эстетов заметим: в частных случаях получается, что все вычислимые функции полувычислимы, а всюду определённые полувычислимые функции вычислимы).

2.3. Частичная функция f называется **невычислимой**, если она не удовлетворяет условиям из пп. 2.1. и 2.2.

3.

Необходимые пояснения.

Из трёх введённых понятий основным является полувычислимость, ибо вычислимость сводится к нему. Для выделения вычислимых функций из полувычислимых можно применить несколько методов, в частности использовать характеристические функции χ_X(x).

Существуют невычислимые функции, так как каждая программа – это конечный текст в конечном алфавите, так что множество программ счётно, тогда как множество всех функций отображения $Z^+ \to Z^+$ несчётно.

4.

На первый взгляд кажется, что приведённых определениях есть слабое место: не точно определено понятие «программы». Однако при любом уточнении программа суть текст над конечным алфавитом. Но есть «сильный» вопрос: возможно существует иерархия точно описываемых возрастающих по мощности вычислительных средств, таких что для каждой функции отображения $Z^+ \to Z^+$можно подобрать свою программу, которая может вычислять эту функцию?

Фундаментальным открытием теории вычислимости было то обстоятельство, что на этот последний вопрос нужно дать отрицательный ответ. К настоящему времени математика обладает единственным и окончательным формальным понятием, которое выдержало все проверки на его соответствие интуитивному представлению о полувычислимости и именуется тезисом Чёрча в следующих формулировках…

«Слабейшая форма» тезиса (цитируется по работе Ю.И.Мамина)

Можно явно указать:

а) семейство простейших полувычислимых функций;

б) семейство элементарных операций, которые позволяют строить по одним полувычислимым функциям другие полувычислимые функции;

с тем свойством, что любая полувычислимая функция получается за конечное число шагов, каждый из которых состоит в применении одной из элементарных операций к ранее построенным, либо к простейшим функциям.

Нетрудно заметить, что приведённые выше понятия и определения подводят к понятию рекурсивной функции, к применению рекурсивных процедур.

(Википедия. Рекурсия — процесс повторения элементов самоподобным образом. В математике и информатике рекурсия имеет отношение к методу определения функций. Рекурсивно заданная функция в своём определении содержит себя; в частности, рекурсивной является функция, заданная рекуррентной формулой.)

Так и появилась «обычная форма тезиса Чёрча.

«Обычная форма» (цитируется по работе Ю.И.Мамина)

А) Функция f полувычислима, если и только если она частично рекурсивна.

Б) Функция f вычислима, если и только если f и $\chi_{D(f)}$ частично рекурсивны.

(Здесь обозначено: D(f) – область определения функции f, а χ_X(x) – характеристическая функция, принимающая значение 1, если $x \in X$, либо значение 2, если $x \notin X$)

«Конструктивно» (Вычислительные системы)

Тезис Чёрча – утверждение, согласно которому понятие вычислимости по Тьюрингу является корректной формализацией нашего интуитивного понятия эффективной вычислимости.