Вероятностные структуры данных: когда приблизительно очень даже хорошо

Марат Ахин

2 ноября 2017 г.

Санкт-Петербургский политехнический университет

Проблема

- Если у вас много данных, у вас много вопросов
  - Есть ли у нас уже такой элемент?
  - Сколько разных элементов у нас есть?
  - Какие элементы встречаются чаще всего?

Проблема

- Если у вас много данных, у вас много проблем
    - Как анализировать?
    - Как хранить?

Проблема

- Если у вас много данных, у вас много проблем
  - Как анализировать?
  - Как хранить?

Изи ваще, все в хэш-таблицу и посчитаем! (с) анон

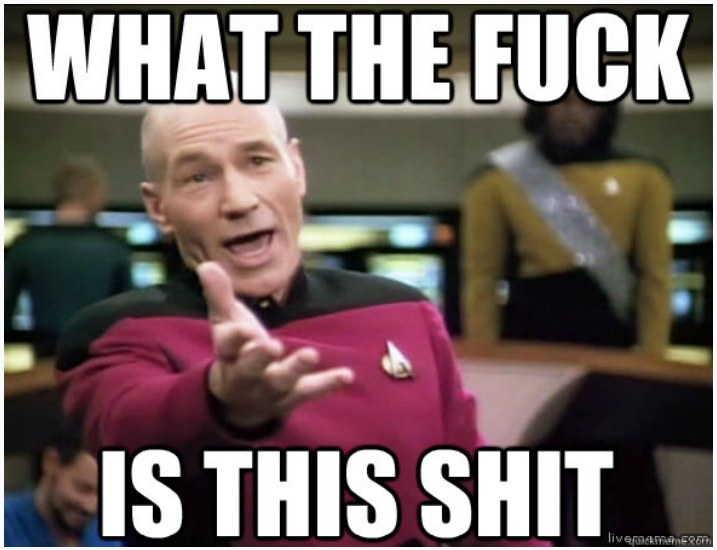
Хэш-таблицы и много данных

- Допустим, мы хотим анализировать Интернет
  - 10^9 уникальных сайтов
  - 4 Гб данных
  - Очень грубая оценка снизу

Да у меня в ноуте оперативы больше! (c) анон

Exact membership query

- Есть ли у нас уже такой элемент?
  - Наше решение?
    - Массив? (4 Гб)
    - Список? (12 Гб)
    - Хэш-таблица? (16-40 Гб)



Exact membership query

- Можем ли мы сделать лучше?..

Exact membership query

- Можем ли мы сделать лучше?..

- ...если не ослабим ограничения на задачу

Membership query

- Есть ли у нас уже такой элемент?
    - Иногда можно ошибаться

Это же почти как хэш-функция?!

- Массив бит размера m
- Хэш-функция $hash(e) \in [0, m)$

Membership query

- Есть ли у нас уже такой элемент?
    - Иногда можно ошибаться

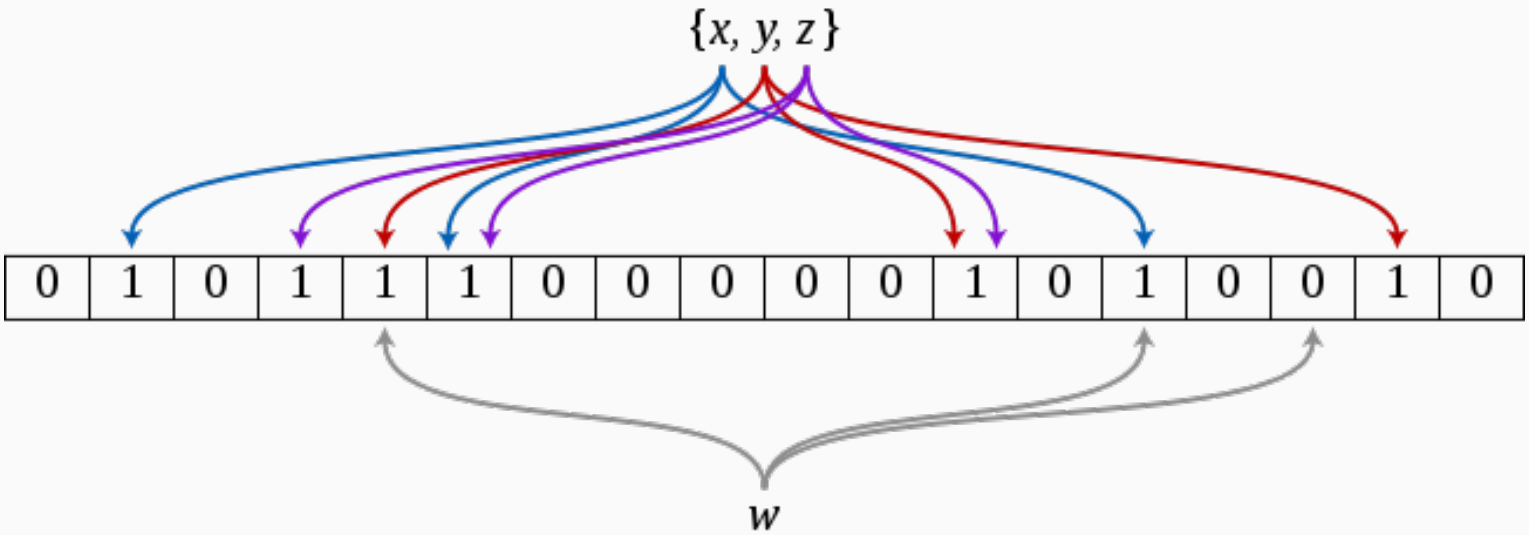
Это же почти как хэш-функция?!

- Массив бит размера m
- Хэш-функция $hash(e) \in [0, m)$

А что с ошибками?

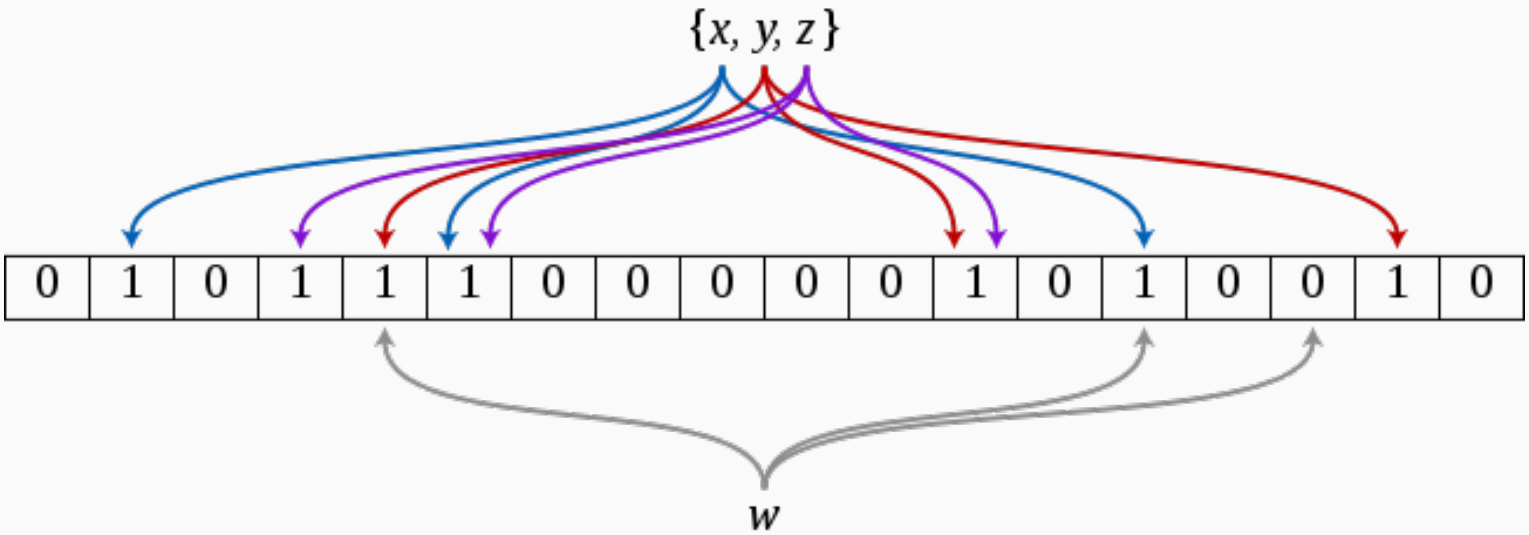
Bloom filter

- А если взять не одну, а много хэш-функций?
- Массив бит размера m
- k хэш-функций $hash_i(e) \in [0, m)$



Bloom filter

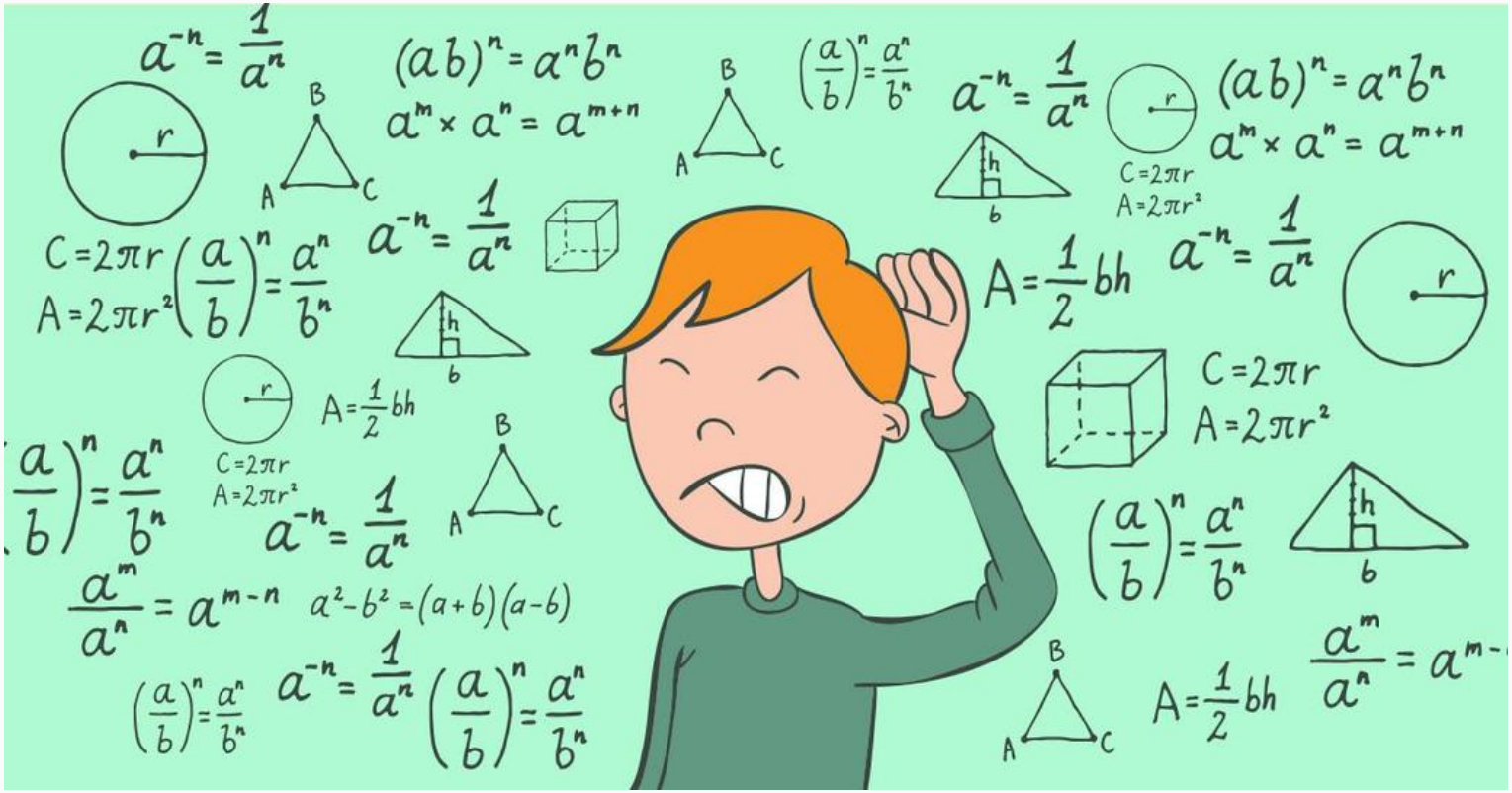
- А если взять не одну, а много хэш-функций?
- Массив бит размера m
- k хэш-функций $hash_i(e) \in [0, m)$



А что с ошибками?

Bloom filter

- Давайте посчитаем...



Bloom filter

$$m = -n\frac{\ln \delta}{\ln^2 2}$$

$$k = \frac{m}{n} \ln 2$$

Все равно, наверное, много памяти надо! (c) анон

- $\delta = 5\%$
  - $m \approx 6.2 \times 10^9 \approx 0.75GB$
  - $k \approx 4$
- $\delta = 10\%$
  - $m \approx 0.9 \times 10^9 \approx 0.11GB$
  - $k \approx 3$

Bloom filter

- А что с удалением элементов?

Bloom filter

- А что с удалением элементов?
- Простой ответ: его нет
- Сложный ответ: два фильтра Блума лучше, чем один
    - Один фильтр на добавление
    - Второй фильтр на удаление
        - А что с повторным добавлением?

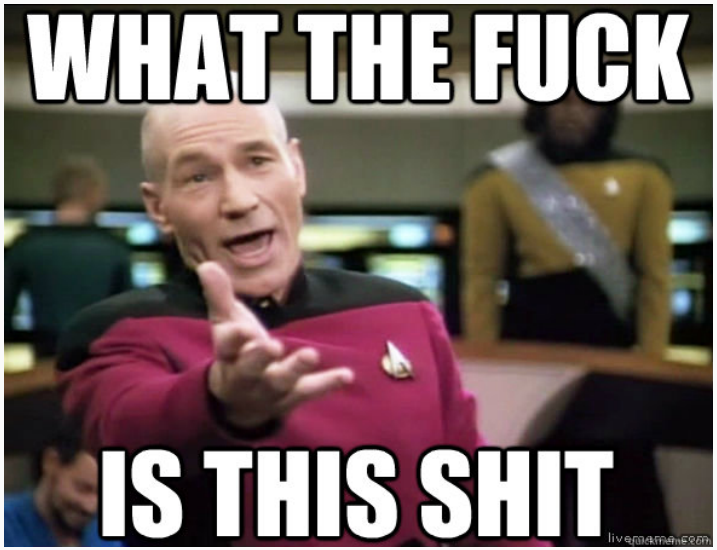
Bloom filter

- А что с удалением элементов?
- Простой ответ: его нет
- Сложный ответ: два фильтра Блума лучше, чем один
    - Один фильтр на добавление
    - Второй фильтр на удаление
        - А что с повторным добавлением?
        - Простой ответ: его нет
        - Сложный ответ: ...

Intermission

Exact cardinality estimation

- Сколько разных элементов у нас есть?
  - Наше решение?
    - Массив? (4 Гб)
    - Список? (12 Гб)
    - Хэш-таблица? (16-40 Гб)



Cardinality estimation

- Сколько разных элементов у нас есть?
  - Плюс-минус 5 процентов

Хм, разные элементы с вероятностью ошибки...

Где же я это только что слышал?..

- Фильтр Блума может использоваться для оценки мощности множества

$$n' = \frac{m}{k} \ln\left(1 - \frac{Ones}{m}\right)$$

Cardinality estimation

- Сколько разных элементов у нас есть?
  - Плюс-минус 5 процентов

Хм, разные элементы с вероятностью ошибки...

Где же я это только что слышал?..

- Фильтр Блума может использоваться для оценки мощности множества

$$n' = \frac{m}{k} \ln\left(1 - \frac{Ones}{m}\right)$$

А что с ошибками?

Cardinality estimation

- Допустим, что мы рассматриваем равномерно распределенные случайные числа
  - 1/2 будет иметь вид $1xxx\ldots xxx$
  - 1/4 будет иметь вид $01xx\ldots xxx$
  - 1/8 будет иметь вид $001x\ldots xxx$
  - ...
- Получается, что позиция старшей единицы может служить для очень грубой, но оценки мощности множества наших чисел

  Подождите, тут один элемент решает все?!

[Hyper]LogLog

- Разобьем наше множество на m подмножеств, а потом объединим результаты

$$e = x_n x_{n-1} \dots x_{b+1} x_b \dots x_2 x_1$$

$$j = x_b \dots x_1$$

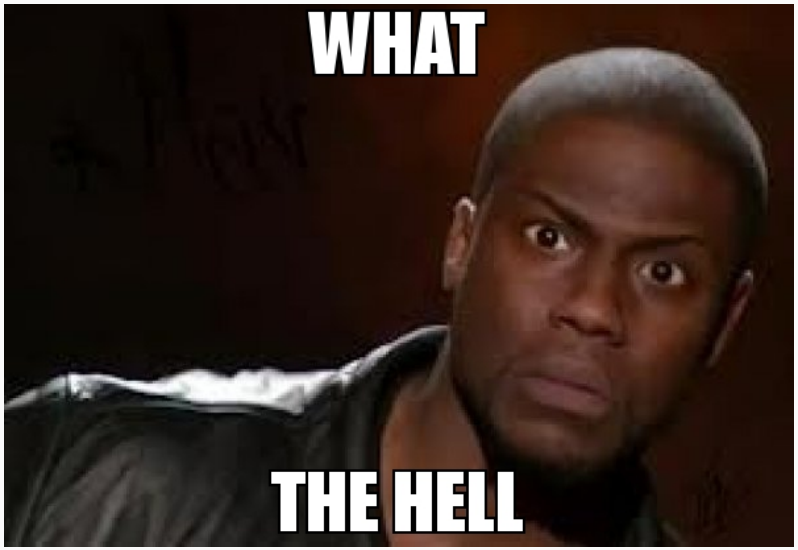
$$p = leftmost\_one(x_n \dots x_{b+1})$$

$$M(j) = \max(M(j), p)$$

Как объединять результаты для подмножеств?

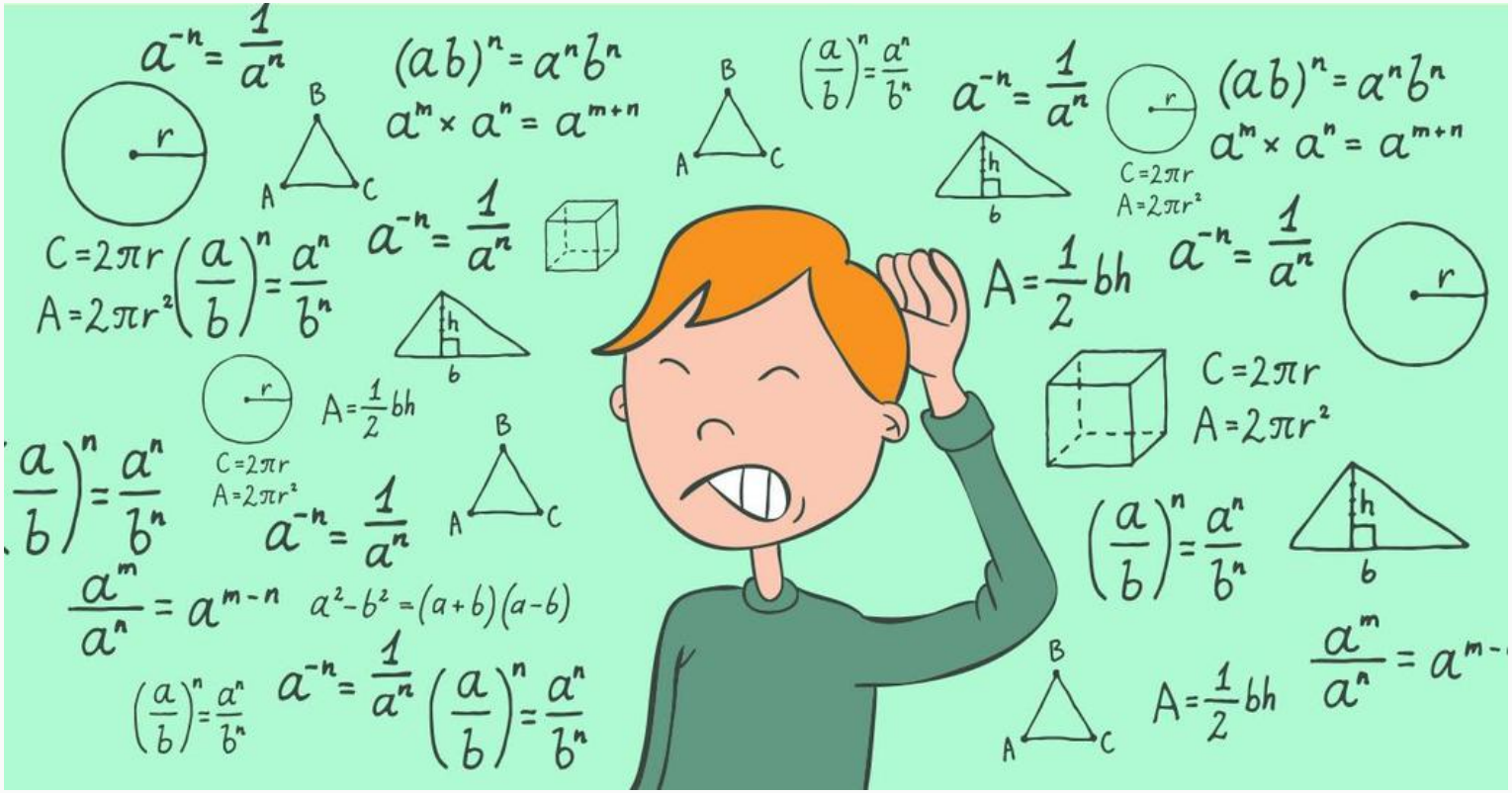
[Hyper]LogLog

$$Z = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} 2^{-M(j)}}$$



[Hyper]LogLog

- Давайте посчитаем...



[Hyper]LogLog

- В итоге, получаем следующее выражение для оценки мощности множества

$$n‘ = m^2 Z$$

- В итоге, получаем следующее выражение для оценки мощности множества

$$n' = \alpha m^2 Z$$

А что с точностью и памятью? Все же плохо?! (с) анон

$$\sigma \approx \frac{1.04}{\sqrt{m}}$$

HyperLogLog

- $3\sigma = 5\%$
  - $m \approx 3894$
  - Каждый регистр размера 8 бит (можно и меньше)
  - Итого: 4 Кб
- $\sigma = 5\%$
  - $m \approx 433$
  - Каждый регистр размера 8 бит (можно и меньше)
  - Итого: 433 байта

HyperLogLog

- $3\sigma = 5\%$
  - $m \approx 3894$
  - Каждый регистр размера 8 бит (можно и меньше)
  - Итого: 4 Кб
- $\sigma = 5\%$
  - $m \approx 433$
  - Каждый регистр размера 8 бит (можно и меньше)
  - Итого: 433 байта

Подождите, там что-то было про равномерно распределенные...

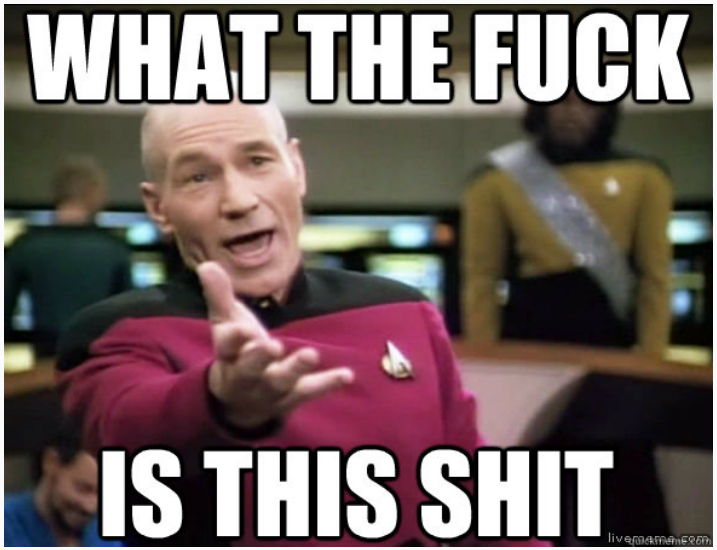
HyperLogLog

- Хорошие хэш-функции порождают значения, близкие к равномерно распределенным случайным числам
- Берем элементы исходного множества и пропускаем через хорошую хэш-функцию
- ...
- PROFIT!

Intermission

Exact frequency estimation

- Какие элементы встречаются чаще всего?
  - Наше решение?
    - ~~Массив? (4 Гб)~~
    - ~~Список? (12 Гб)~~
    - Хэш-таблица? (16-40 Гб)



Frequency estimation

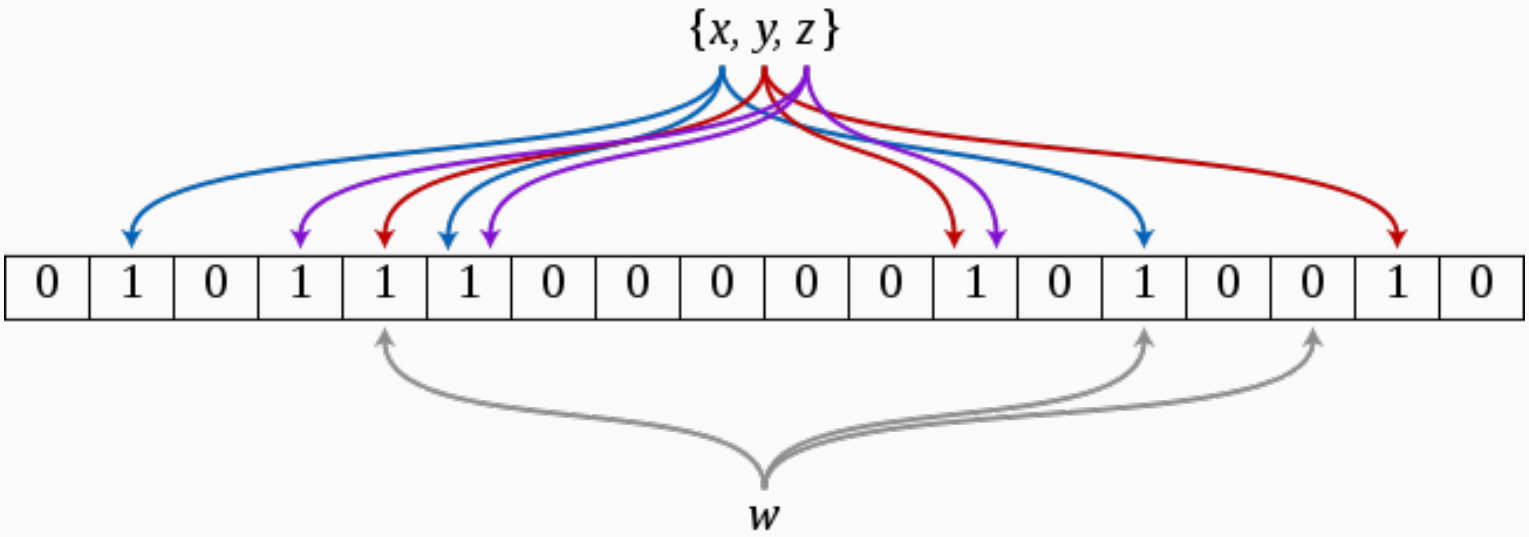
- Какие элементы встречаются чаще всего?
    - Иногда можно ошибаться

  Стоп, опять фильтр Блума? Он же как раз определяет, встречали ли мы элемент или нет...

- Фильтр Блума не умеет считать, сколько раз встретился элемент

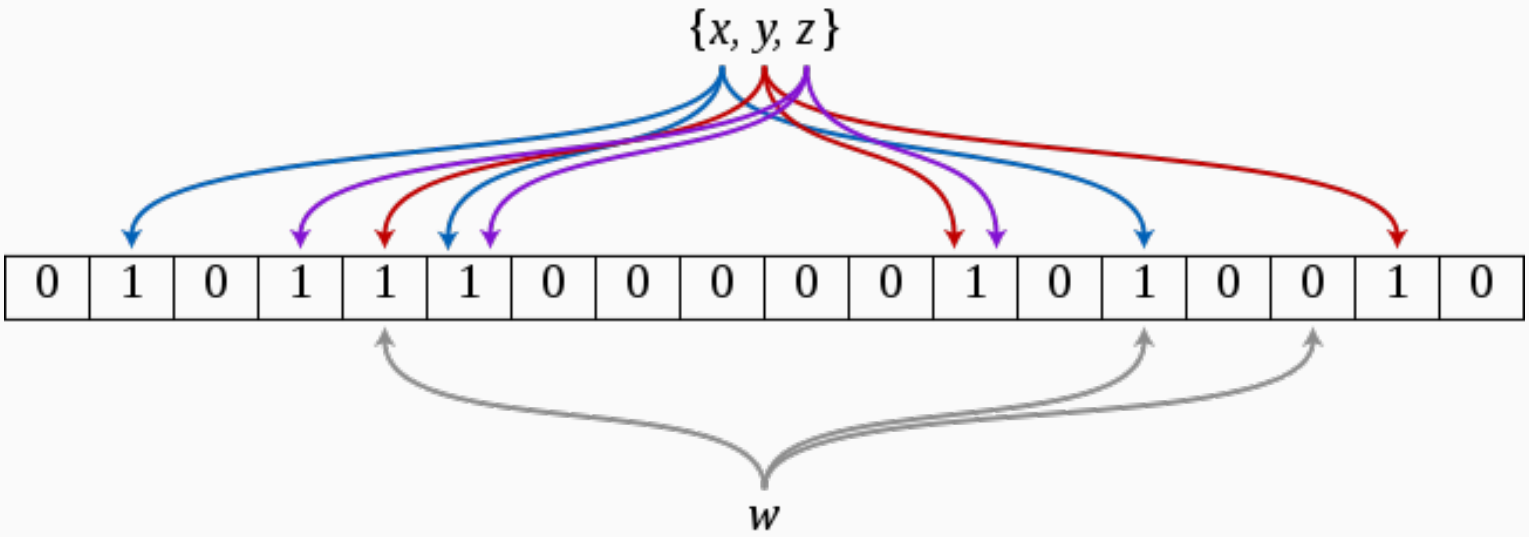
Frequency estimation

- Давайте вместо массива бит использовать массив счетчиков



Frequency estimation

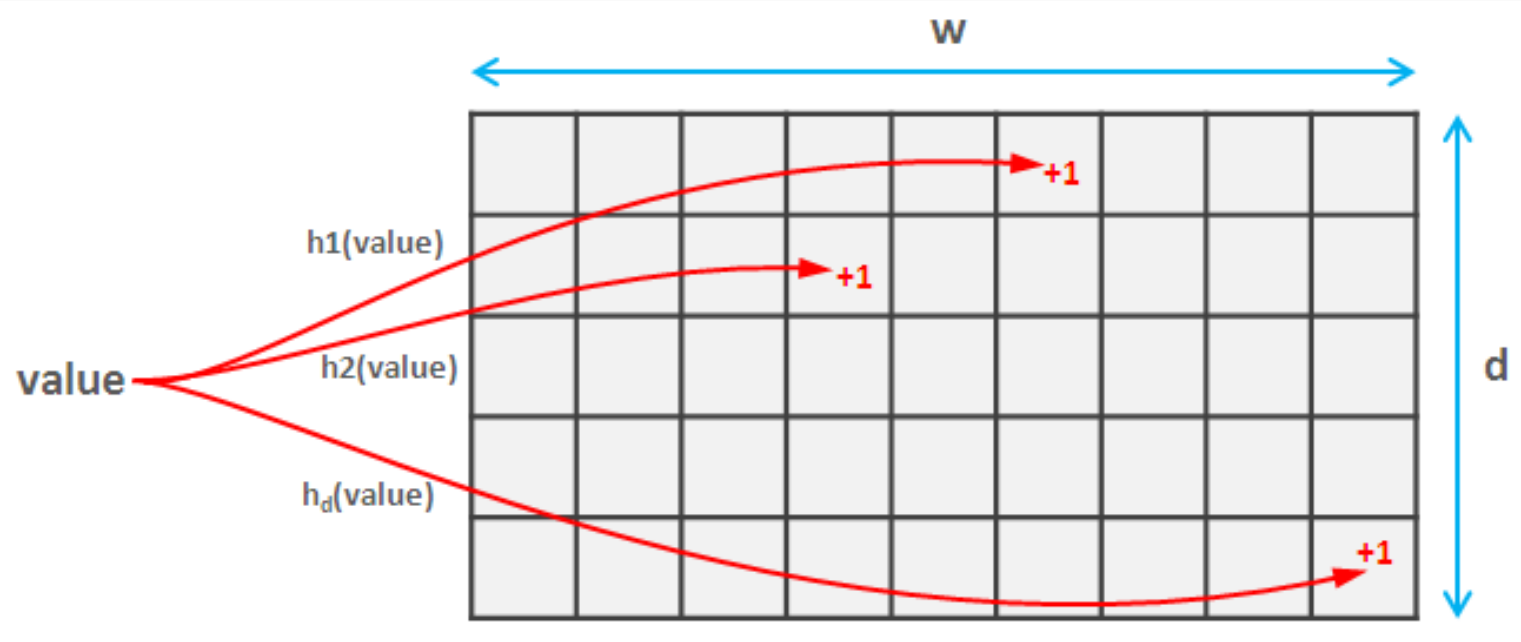
- Давайте вместо массива бит использовать массив счетчиков



А что с ошибками?

Count-min sketch

- Давайте вместо одного массива использовать d массивов



- Оценка для элемента — минимум из всех его ячеек
- Почему минимум?

Count-min sketch

$$w = \frac{1}{\epsilon}$$

$$d = \ln \frac{1}{\delta}$$

- $\epsilon = 5\%, \delta = 1\%$
  - $w = 20$
  - $d \approx 5$
  - Итого: 800 байт
- $\epsilon = 1\%, \delta = 5\%$
  - $w = 100$
  - $d \approx 3$
  - Итого: 2400 байт

Count-min sketch

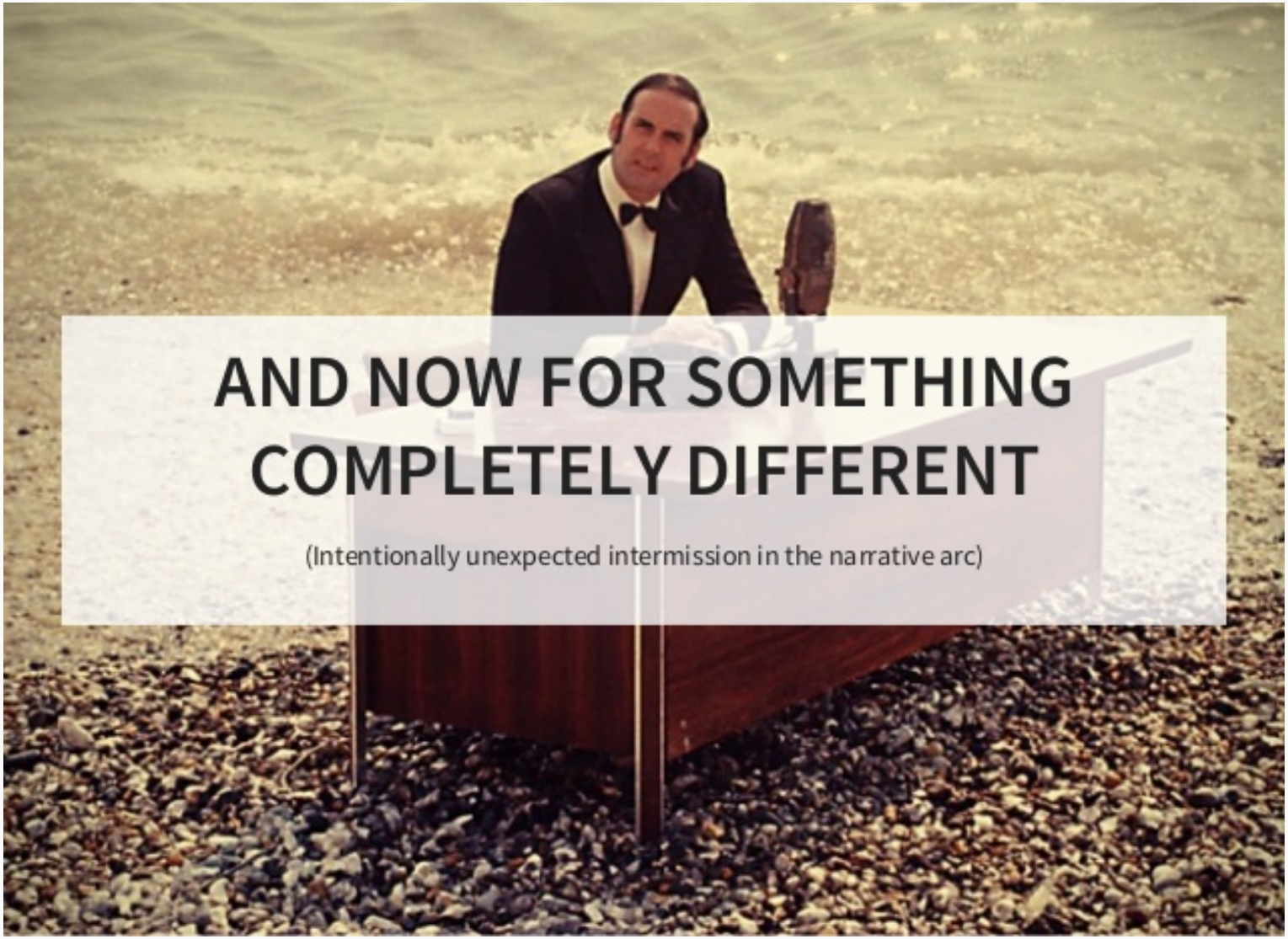
$$w = \frac{1}{\epsilon}$$

$$d = \ln \frac{1}{\delta}$$

- $\epsilon = 5\%, \delta = 1\%$
  - $w = 20$
  - $d \approx 5$
  - Итого: 800 байт
- $\epsilon = 1\%, \delta = 5\%$
  - $w = 100$
  - $d \approx 3$
  - Итого: 2400 байт

Ой-вей, а как узнать с помощью этой структуры данных, кто был чаще всего?

Intermission



А что еще можно сделать с вероятностью?

- Сделать случайный список!..

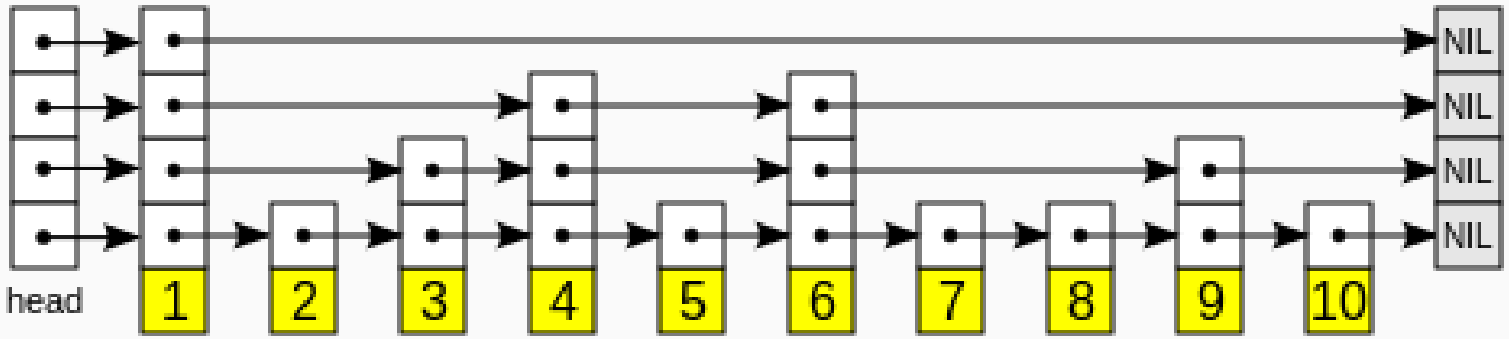
- ...хорошо, не совсем уж случайный

Чем плох обычный список?

- Очень плохо работает на доступ к произвольному элементу
- Потому что нет быстрого способа добраться до какого-либо элемента

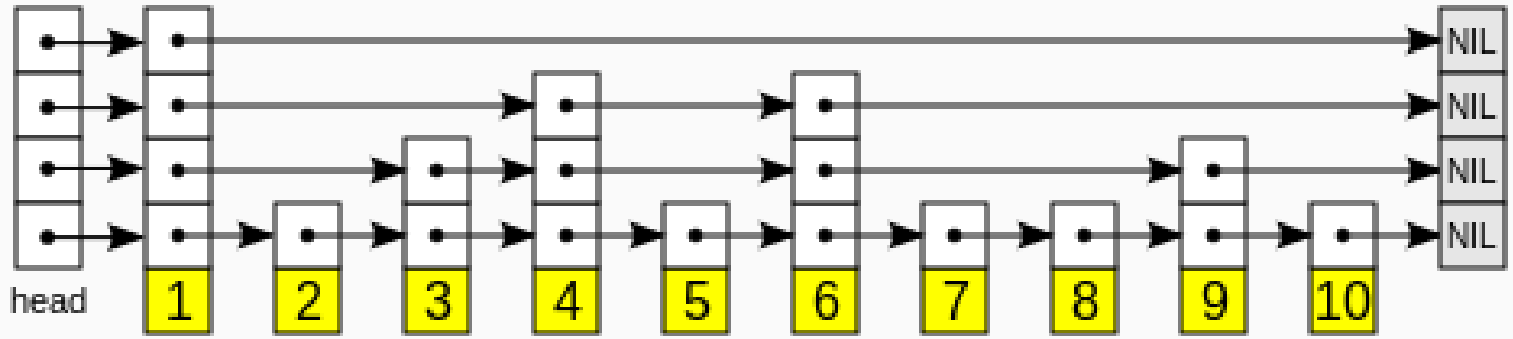
Skip list

- Сделаем “магистрали” вперед, в обход обычной последовательности



Skip list

- Сделаем “магистрали” вперед, в обход обычной последовательности



- $\log n$ уровней
- Константное количество шагов на каждом уровне
- Итого: сложность операций $O(\log n)$

А я еще индексироваться люблю, а тут фиг! (с) анон

Skip list with indices

- Добавим к каждой магистрали то, сколько элементов вперед она перескакивает
- Тривиально поддерживается при операциях со списком

А что еще классного в скип-листе?

- Хорошо обрабатывается параллельно
- Может обрабатываться вообще без блокировок (lock-free)

What I learned today