Изоморфизм Карри-Говарда

Курс «Формальные методы обеспечения качества ПО»

Михаил Беляев Вадим Цесько

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

29 мая 2012 г.

Содержание

Содержание

Содержание

Содержание

Содержание

Истоки

- 1934 г. — *Haskell Curry*:

[1] Комбинатор — это функция высшего порядка, которая использует только применение функций и ранее определённые комбинаторы

Истоки

- 1934 г. — *Haskell Curry*:
  - Типы комбинаторов [1] можно рассматривать как схемы аксиом для импликативной логики

[1] Комбинатор — это функция высшего порядка, которая использует только применение функций и ранее определённые комбинаторы

Истоки

- 1934 г. — *Haskell Curry*:
  - Типы комбинаторов [1] можно рассматривать как схемы аксиом для импликативной логики
- 1958 г. — *Haskell Curry*:

[1] Комбинатор — это функция высшего порядка, которая использует только применение функций и ранее определённые комбинаторы

Истоки

- 1934 г. — *Haskell Curry*:
  - Типы комбинаторов [1] можно рассматривать как схемы аксиом для импликативной логики
- 1958 г. — *Haskell Curry*:
  - Система доказательства Гильберта частично совпадает с моделью вычислений логики комбинаторов

[1] Комбинатор — это функция высшего порядка, которая использует только применение функций и ранее определённые комбинаторы

Истоки

- 1934 г. — *Haskell Curry*:
  - Типы комбинаторов [1] можно рассматривать как схемы аксиом для импликативной логики
- 1958 г. — *Haskell Curry*:
  - Система доказательства Гильберта частично совпадает с моделью вычислений логики комбинаторов
- 1969 г. — *William Alvin Howard*:

[1] Комбинатор — это функция высшего порядка, которая использует только применение функций и ранее определённые комбинаторы

Истоки

- 1934 г. — *Haskell Curry*:
  - Типы комбинаторов [1] можно рассматривать как схемы аксиом для импликативной логики
- 1958 г. — *Haskell Curry*:
  - Система доказательства Гильберта частично совпадает с моделью вычислений логики комбинаторов
- 1969 г. — *William Alvin Howard*:
  - Более высокоуровневая система доказательств — «Естественная дедукция», — отображается в типизированное λ-исчисление

[1] Комбинатор — это функция высшего порядка, которая использует только применение функций и ранее определённые комбинаторы

Идея

Изоморфизм Карри-Говарда

Системы доказательств и модели вычислений суть **одинаковые** по структуре типы объектов

Неформально

Любой **типизированной** системе соответствует некоторая логика, и наоборот

Интерпретации

- **Доказательство — программа**

Интерпретации

- **Доказательство — программа**
- Доказываемая **формула — тип** программы

Интерпретации

- **Доказательство — программа**
- Доказываемая **формула — тип** программы

- **Тип** возвращаемого значения функции — **теорема** в логике

Интерпретации

- **Доказательство — программа**
- Доказываемая **формула — тип** программы

- **Тип** возвращаемого значения функции — **теорема** в логике
- **Типы** аргументов — **гипотезы**

Интерпретации

- **Доказательство — программа**
- Доказываемая **формула — тип** программы

- **Тип** возвращаемого значения функции — **теорема** в логике
- **Типы** аргументов — **гипотезы**
- **Программа**, вычисляющая функцию — **доказательство теоремы**

Последствия

- Новый класс формальных систем — одновременно и системы доказательств, и типизированные функциональные языки программирования (см. Coq)
- Основа современной теории типов
- Новые вопросы в теории вычислений (соответствия других систем доказательств и моделей вычислений)
- Унификация математической логики и основ Computer Science

Соглашения

Соглашения

- Чисто функциональные языки программирования (e. g. Haskell)

Соглашения

- Чисто функциональные языки программирования (e. g. Haskell)
- Не совсем формально

Соглашения

- Чисто функциональные языки программирования (e. g. Haskell)
- Не совсем формально
- Вы сдали зачёт по курсу «Языки программирования» ☺

Соглашения

- Чисто функциональные языки программирования (e. g. Haskell)
- Не совсем формально
- Вы сдали зачёт по курсу «Языки программирования» ☺
- Вы помните предыдущую лекцию ☺

Будем всё показывать на примере Haskell

Но:

Будем всё показывать на примере Haskell

Но:

- Только чистые функции (никаких монад!)

Будем всё показывать на примере Haskell

Но:

- Только чистые функции (никаких монад!)
- Никакой рекурсии в коде!

Будем всё показывать на примере Haskell

Но:

- Только чистые функции (никаких монад!)
- Никакой рекурсии в коде!
- Никакой рекурсии в типах!

Будем всё показывать на примере Haskell

Но:

- Только чистые функции (никаких монад!)
- Никакой рекурсии в коде!
- Никакой рекурсии в типах!
- Запрещены функции `undefined` и `error`

Будем всё показывать на примере Haskell

Но:

- Только чистые функции (никаких монад!)
- Никакой рекурсии в коде!
- Никакой рекурсии в типах!
- Запрещены функции `undefined` и `error`
- Не используются стандартные типы (кроме некоторых, см. далее)

Будем всё показывать на примере Haskell

Но:

- Только чистые функции (никаких монад!)
- Никакой рекурсии в коде!
- Никакой рекурсии в типах!
- Запрещены функции `undefined` и `error`
- Не используются стандартные типы (кроме некоторых, см. далее)
- Будем называть типы большими буквами: `A, B, C ...`

Будем всё показывать на примере Haskell

Но:

- Только чистые функции (никаких монад!)
- Никакой рекурсии в коде!
- Никакой рекурсии в типах!
- Запрещены функции `undefined` и `error`
- Не используются стандартные типы (кроме некоторых, см. далее)
- Будем называть типы большими буквами: `A`, `B`, `C` ...
- Из зависимых типов — только кортежи и *вариантные типы*

Будем всё показывать на примере Haskell

Но:

- Только чистые функции (никаких монад!)
- Никакой рекурсии в коде!
- Никакой рекурсии в типах!
- Запрещены функции `undefined` и `error`
- Не используются стандартные типы (кроме некоторых, см. далее)
- Будем называть типы большими буквами: `A`, `B`, `C` ...
- Из зависимых типов — только кортежи и *вариантные типы*
  - Вместо `data A = Ab B | Ac C` будем писать `B | C`

Доказательство теорем

Доказательство теорем

1. Формулируем теорему

Доказательство теорем

1. Формулируем теорему
2. Конструируем тип, который выражает эту теорему

Доказательство теорем

1. Формулируем теорему
2. Конструируем тип, который выражает эту теорему
3. Находим значение, имеющее этот тип

Высказывания суть типы

Высказывания суть типы

- Что означает тип `A -> B`?

Высказывания суть типы

- Что означает тип `A -> B`?
- $A \to B$

Высказывания суть типы

- Что означает тип `A -> B`?
- $A \to B$
- Если типы `A` и `B` можно интерпретировать логически

Высказывания суть типы

- Что означает тип `A -> B`?
- $A \to B$
- Если типы `A` и `B` можно интерпретировать логически
- $A \to B$, если `A -> B` — населённый (inhabited) тип

Высказывания суть типы

- Что означает тип `A -> B`?
- $A \to B$
- Если типы `A` и `B` можно интерпретировать логически
- $A \to B$, если `A -> B` — населённый (inhabited) тип

Пример

- Haskell-функция `const :: a -> b -> a`
- В логике транслируется в $a \to (b \to a)$
- Это теорема, поскольку тип `a -> b -> a` населён значением `const`

Логические операции

- Оператор импликации $\rightarrow$ в логике соответствует конструктору типа ->

Логические операции

- Оператор импликации $\rightarrow$ в логике соответствует конструктору типа ->
- Рассмотрим: $\wedge$, $\vee$, *true*, *false*, $\neg$

Конъюнкция и дизъюнкция

- $A \wedge B$ — теорема, значит:
  - A — теорема
  - B — теорема

Конъюнкция и дизъюнкция

- $A \wedge B$ — теорема, значит:
  - A — теорема
  - B — теорема
- Нужно найти значение `(A, B)`:
  - тип `A` соответствует A
  - тип `B` соответствует B

Конъюнкция и дизъюнкция

- $A \wedge B$ — теорема, значит:
  - A — теорема
  - B — теорема
- Нужно найти значение `(A, B)`:
  - тип `A` соответствует A
  - тип `B` соответствует B
- Аналогично высказыванию $A \vee B$ соответствует тип `A | B`

Значение `true`

- Нужен тип, который всегда населён

Значение `true`

- Нужен тип, который всегда населён
- В Haskell его очень просто написать:
  - `data Unit = Unit`

Значение `true`

- Нужен тип, который всегда населён
- В Haskell его очень просто написать:
  - `data Unit = Unit`
- Так же сгодился бы любой стандартный тип, имеющий значения (`Char`, `Int`, `String`...)

Значение `true`

- Нужен тип, который всегда населён
- В Haskell его очень просто написать:
  - `data Unit = Unit`
- Так же сгодился бы любой стандартный тип, имеющий значения (`Char`, `Int`, `String`...)
- Наиболее простым таким типом является тип `()`

Значение `true`

- Нужен тип, который всегда населён
- В Haskell его очень просто написать:
  - `data Unit = Unit`
- Так же сгодился бы любой стандартный тип, имеющий значения (`Char`, `Int`, `String`...)
- Наиболее простым таким типом является тип `()`

Следствия:

Значение `true`

- Нужен тип, который всегда населён
- В Haskell его очень просто написать:
  - `data Unit = Unit`
- Так же сгодился бы любой стандартный тип, имеющий значения (`Char`, `Int`, `String`...)
- Наиболее простым таким типом является тип `()`

Следствия:

- `(() | A)` и `(A | ())` населены для любого типа `A`:
  - Т. е. $true \vee A$ и $A \vee true$ теоремы

Значение `true`

- Нужен тип, который всегда населён
- В Haskell его очень просто написать:
  - `data Unit = Unit`
- Так же сгодился бы любой стандартный тип, имеющий значения (`Char`, `Int`, `String`...)
- Наиболее простым таким типом является тип `()`

Следствия:

- `(() | A)` и `(A | ())` населены для любого типа `A`:
  - Т. е. $true \vee A$ и $A \vee true$ теоремы
- `((),A)` и `(A,())` ведут себя так же как тип `A`:
  - Соответствуют $true \wedge A$ и $A \wedge true$

Значение `true`

- Нужен тип, который всегда населён
- В Haskell его очень просто написать:
  - `data Unit = Unit`
- Так же сгодился бы любой стандартный тип, имеющий значения (`Char`, `Int`, `String`...)
- Наиболее простым таким типом является тип `()`

Следствия:

- `(() | A)` и `(A | ())` населены для любого типа `A`:
  - Т. е. $true \vee A$ и $A \vee true$ теоремы
- `((),A)` и `(A,())` ведут себя так же как тип `A`:
  - Соответствуют $true \wedge A$ и $A \wedge true$
- `A -> ()` всегда населён (функцией `unit x = ()`):
  - $A \to true$ всегда верно

Значение `false`

- Нужен ненаселённый тип (не путаем с типом `()`)

Значение `false`

- Нужен ненаселённый тип (не путаем с типом `()`)
- В GHC есть «фантомный» тип $\bot$, мы будем использовать обозначение `Bot`

Значение `false`

- Нужен ненаселённый тип (не путаем с типом `()`)
- В GHC есть «фантомный» тип $\bot$, мы будем использовать обозначение `Bot`
  - У него нет значений
  - Его можно привести к любому другому типу: `cast :: Bot -> a`
  - Именно такой тип *на самом деле* имеет функция `undefined`

Значение `false`

- Нужен ненаселённый тип (не путаем с типом `()`)
- В GHC есть «фантомный» тип $\bot$, мы будем использовать обозначение `Bot`
  - У него нет значений
  - Его можно привести к любому другому типу: `cast :: Bot -> a`
  - Именно такой тип *на самом деле* имеет функция `undefined`

Следствия:

Значение `false`

- Нужен ненаселённый тип (не путаем с типом `()`)
- В GHC есть «фантомный» тип $\bot$, мы будем использовать обозначение `Bot`
  - У него нет значений
  - Его можно привести к любому другому типу: `cast :: Bot -> a`
  - Именно такой тип *на самом деле* имеет функция `undefined`

Следствия:

- `(Bot, A)` и `(A, Bot)` ненаселены для любого типа `A`:
  - Т. е. $\mathit{false} \wedge A$ и $A \wedge \mathit{false}$ не теоремы

Значение `false`

- Нужен ненаселённый тип (не путаем с типом `()`)
- В GHC есть «фантомный» тип $\bot$, мы будем использовать обозначение `Bot`
  - У него нет значений
  - Его можно привести к любому другому типу: `cast :: Bot -> a`
  - Именно такой тип *на самом деле* имеет функция `undefined`

Следствия:

- `(Bot, A)` и `(A, Bot)` ненаселены для любого типа `A`:
  - Т. е. $\mathit{false} \wedge A$ и $A \wedge \mathit{false}$ не теоремы
- `(Bot | A)` и `(A | Bot)` ведут себя так же как тип `A`:
  - Соответствуют $\mathit{false} \vee A$ и $A \vee \mathit{false}$

Значение `false`

- Нужен ненаселённый тип (не путаем с типом `()`)
- В GHC есть «фантомный» тип $\bot$, мы будем использовать обозначение `Bot`
  - У него нет значений
  - Его можно привести к любому другому типу: `cast :: Bot -> a`
  - Именно такой тип *на самом деле* имеет функция `undefined`

Следствия:

- `(Bot, A)` и `(A, Bot)` ненаселены для любого типа `A`:
  - Т. е. $\mathit{false} \wedge A$ и $A \wedge \mathit{false}$ не теоремы
- `(Bot | A)` и `(A | Bot)` ведут себя так же как тип `A`:
  - Соответствуют $\mathit{false} \vee A$ и $A \vee \mathit{false}$
- `Bot -> A` населён всегда (функцией `cast`):
  - $\mathit{false} \to A$ всегда верно

Отрицание

Вопрос на засыпку

Можно ли выразить отрицание через уже имеющиеся у нас операции?

Отрицание

Вопрос на засыпку

Можно ли выразить отрицание через уже имеющиеся у нас операции?

- Операция $\neg$ превращает теоремы в нетеоремы и наоборот

Отрицание

Вопрос на засыпку

Можно ли выразить отрицание через уже имеющиеся у нас операции?

- Операция $\neg$ превращает теоремы в нетеоремы и наоборот
- В Haskell синоним типа: `type Not a = a -> Bot`

Отрицание

Вопрос на засыпку

Можно ли выразить отрицание через уже имеющиеся у нас операции?

- Операция $\neg$ превращает теоремы в нетеоремы и наоборот
- В Haskell синоним типа: `type Not a = a -> Bot`
- Если `A` — тип-теорема, то тип `A -> Bot` ненаселён

Отрицание

Вопрос на засыпку

Можно ли выразить отрицание через уже имеющиеся у нас операции?

- Операция $\neg$ превращает теоремы в нетеоремы и наоборот
- В Haskell синоним типа: `type Not a = a -> Bot`
- Если `A` — тип-теорема, то тип `A -> Bot` ненаселён
- Если `A` — не теорема, то:

Отрицание

Вопрос на засыпку

Можно ли выразить отрицание через уже имеющиеся у нас операции?

- Операция $\neg$ превращает теоремы в нетеоремы и наоборот
- В Haskell синоним типа: `type Not a = a -> Bot`
- Если `A` — тип-теорема, то тип `A -> Bot` ненаселён
- Если `A` — не теорема, то:
  - `A` можно заменить на `Bot`

Отрицание

Вопрос на засыпку

Можно ли выразить отрицание через уже имеющиеся у нас операции?

- Операция $\neg$ превращает теоремы в нетеоремы и наоборот
- В Haskell синоним типа: `type Not a = a -> Bot`
- Если `A` — тип-теорема, то тип `A -> Bot` ненаселён
- Если `A` — не теорема, то:
  - `A` можно заменить на `Bot`
  - Функция `id :: Bot -> Bot` населяет `Not A`

Отрицание

Вопрос на засыпку

Можно ли выразить отрицание через уже имеющиеся у нас операции?

- Операция $\neg$ превращает теоремы в нетеоремы и наоборот
- В Haskell синоним типа: `type Not a = a -> Bot`
- Если `A` — тип-теорема, то тип `A -> Bot` ненаселён
- Если `A` — не теорема, то:
  - `A` можно заменить на `Bot`
  - Функция `id :: Bot -> Bot` населяет `Not A`
  - Следовательно, `Not A` — тип-теорема

Система доказательств

Аксиомы:

- $A \to (B \to A)$
- $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Правило вывода:

- **Modus Ponens**

Система доказательств

Аксиомы:

- $A \to (B \to A)$
- $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Правило вывода:

- **Modus Ponens**

Theorem

$A \to A$

Доказательство.

- **Ax2**$[A \ / \ C]$: $(A \to (B \to A)) \to ((A \to B) \to (A \to A))$
- **Ax1**: $(A \to B) \to (A \to A)$
- $[A \to C \ / \ B]$: $(A \to (C \to A)) \to (A \to A)$
- **Ax1**: $A \to A$

□

Исчисление комбинаторов

Аксиомы:

Исчисление комбинаторов

Аксиомы:

- $A \to (B \to A)$

```
k :: a -> b -> a
```

Исчисление комбинаторов

Аксиомы:

- $A \to (B \to A)$

```
k :: a -> b -> a
k x y = x
```

Исчисление комбинаторов

Аксиомы:

- $A \to (B \to A)$

```
k :: a -> b -> a
k x y = x
```

- $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

```
s :: (a -> b -> c)-> (a -> b)-> a -> c
```

Исчисление комбинаторов

Аксиомы:

- $A \to (B \to A)$

```
k :: a -> b -> a
k x y = x
```

- $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

```
s :: (a -> b -> c)-> (a -> b)-> a -> c
s x y z = x z (y z)
```

Исчисление комбинаторов

Аксиомы:

- $\cancel{A \to (B \to A)}$

```
k :: a -> b -> a
k x y = x
```

- $\cancel{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}$

```
s :: (a -> b -> c)-> (a -> b)-> a -> c
s x y z = x z (y z)
```

Правило вывода:

- ~~**Modus Ponens**~~ Применение функции к аргументу

Исчисление комбинаторов

Аксиомы:

- ~~$A \to (B \to A)$~~

```
k :: a -> b -> a
k x y = x
```

- ~~$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$~~

```
s :: (a -> b -> c)-> (a -> b)-> a -> c
s x y z = x z (y z)
```

Правило вывода:

- ~~**Modus Ponens**~~ Применение функции к аргументу

Theorem

~~$A \to A$~~ `i :: a -> a`

Исчисление комбинаторов

Аксиомы:

- ~~$A \to (B \to A)$~~

```
k :: a -> b -> a
k x y = x
```

- ~~$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$~~

```
s :: (a -> b -> c)-> (a -> b)-> a -> c
s x y z = x z (y z)
```

Правило вывода:

- ~~**Modus Ponens**~~ Применение функции к аргументу

Theorem

~~$A \to A$~~ `i :: a -> a`

Доказательство

```
i = s k k
```

Исчисление комбинаторов

- Мы только что изобрели комбинаторную логику! (Combinatory logic)

Исчисление комбинаторов

- Мы только что изобрели комбинаторную логику! (Combinatory logic)
- Подобно тому, как на двух указанных аксиомах можно построить систему доказательств, на функциях `s` и `k` можно построить целое исчисление

Исчисление комбинаторов

- Мы только что изобрели комбинаторную логику! (Combinatory logic)
- Подобно тому, как на двух указанных аксиомах можно построить систему доказательств, на функциях `s` и `k` можно построить целое исчисление
- Комбинаторное исчисление аналогично типизированному λ-исчислению, только несколько проще

Исчисление комбинаторов

- Мы только что изобрели комбинаторную логику! (Combinatory logic)
- Подобно тому, как на двух указанных аксиомах можно построить систему доказательств, на функциях `s` и `k` можно построить целое исчисление
- Комбинаторное исчисление аналогично типизированному λ-исчислению, только несколько проще
- Выведенный нами базис – только один из мозможных базисов комбинаторного исчисления, но он вполне полный

Интуиционистская vs классическая логики

- Выше была интуиционистская логика

Интуиционистская vs классическая логики

- Выше была интуиционистская логика
- Теорема классической логики: $\neg(\neg A) \to A$

Интуиционистская vs классическая логики

- Выше была интуиционистская логика
- Теорема классической логики: $\neg(\neg A) \to A$
- Это преобразуется в `((A -> Bot)-> Bot)`

Интуиционистская vs классическая логики

- Выше была интуиционистская логика
- Теорема классической логики: $\neg(\neg A) \to A$
- Это преобразуется в `((A -> Bot)-> Bot)`
- По функции типа `(A -> Bot)-> Bot` нужно получить значение типа `A`

Интуиционистская vs классическая логики

- Выше была интуиционистская логика
- Теорема классической логики: $\neg(\neg A) \to A$
- Это преобразуется в `((A -> Bot)-> Bot)`
- По функции типа `(A -> Bot)-> Bot` нужно получить значение типа `A`
- Функция типа `(A -> Bot)-> Bot` существует, если тип `A -> Bot` ненаселён

Интуиционистская vs классическая логики

- Выше была интуиционистская логика
- Теорема классической логики: $\neg(\neg A) \to A$
- Это преобразуется в `((A -> Bot)-> Bot)`
- По функции типа `(A -> Bot)-> Bot` нужно получить значение типа `A`
- Функция типа `(A -> Bot)-> Bot` существует, если тип `A -> Bot` ненаселён
- Тип `A -> Bot` ненаселён, если тип `A` населён

Интуиционистская vs классическая логики

- Выше была интуиционистская логика
- Теорема классической логики: $\neg(\neg A) \to A$
- Это преобразуется в `((A -> Bot)-> Bot)`
- По функции типа `(A -> Bot)-> Bot` нужно получить значение типа `A`
- Функция типа `(A -> Bot)-> Bot` существует, если тип `A -> Bot` ненаселён
- Тип `A -> Bot` ненаселён, если тип `A` населён

Нужна функция, которая берёт населённый тип и возвращает значение этого типа — это невозможно реализовать в рамках нашей системы

Интуиционистская vs классическая логики

Закон исключённого третьего

$A \vee \neg A = 1$

Интуиционистская vs классическая логики

Закон исключённого третьего

$A \vee \neg A = 1$

- Закон, верный в классической логике

Интуиционистская vs классическая логики

Закон исключённого третьего

$A \vee \neg A = 1$

- Закон, верный в классической логике
- В интуиционистской логике он неверен!

Интуиционистская vs классическая логики

Закон исключённого третьего

$A \vee \neg A = 1$

- Закон, верный в классической логике
- В интуиционистской логике он неверен!
- Подставив вместо A 1 или 0, мы получим верное утверждение

Интуиционистская vs классическая логики

Закон исключённого третьего

$A \vee \neg A = 1$

- Закон, верный в классической логике
- В интуиционистской логике он неверен!
- Подставив вместо A 1 или 0, мы получим верное утверждение
- Но так делать нельзя

Re: Идея

Изоморфизм Карри-Говарда

Системы доказательств и модели вычислений суть **одинаковые** по структуре типы объектов

Неформально

Любой **типизированной** системе соответствует некоторая логика, и наоборот

Re: Идея

Неформально

Любой **типизированной** системе соответствует некоторая логика, и наоборот

Re: Идея

Неформально

Любой **типизированной** системе соответствует некоторая логика, и наоборот

- Зачем мы тогда вводили ограничения? Без них ведь система всё равно оставалась бы типизированной

Re: Идея

Неформально

Любой **типизированной** системе соответствует некоторая логика, и наоборот

- Зачем мы тогда вводили ограничения? Без них ведь система всё равно оставалась бы типизированной
- Логика некоторых систем может оказаться бесполезной или бессмысленной

Запрещённые функции

В Haskell:

- Каждый тип населён значением `undefined` (семантически — `forall a. a` или $\bot$)

Запрещённые функции

В Haskell:

- Каждый тип населён значением `undefined` (семантически — `forall a. a` или $\bot$)
- Следовательно, можно доказать **любую** теорему

Запрещённые функции

В Haskell:

- Каждый тип населён значением `undefined` (семантически — `forall a. a` или $\bot$)
- Следовательно, можно доказать **любую** теорему
- В том числе, можно одновременно доказать A и $\neg A$

Запрещённые функции

В Haskell:

- Каждый тип населён значением `undefined` (семантически — `forall a. a` или $\bot$)
- Следовательно, можно доказать **любую** теорему
- В том числе, можно одновременно доказать A и $\neg A$
- Система неконсистентна — в ней истинными являются противоречащие друг другу утверждения

Запрещённые функции

В Haskell:

- Каждый тип населён значением `undefined` (семантически — `forall a. a` или $\bot$)
- Следовательно, можно доказать **любую** теорему
- В том числе, можно одновременно доказать A и $\neg A$
- Система неконсистентна — в ней истинными являются противоречащие друг другу утверждения
- Такие логики называются дегенеративными или вырожденными (degenerative)

Запрещённые функции

В Haskell:

- Каждый тип населён значением `undefined` (семантически — `forall a. a` или $\bot$)
- Следовательно, можно доказать **любую** теорему
- В том числе, можно одновременно доказать A и $\neg A$
- Система неконсистентна — в ней истинными являются противоречащие друг другу утверждения
- Такие логики называются дегенеративными или вырожденными (degenerative)
- Всё это верно и для функции `error`

Запрет на рекурсию

Пример рекурсивной функции

```
fix f = f (fix f)
fix :: (a -> a) -> a
```

- Населён тип `(a -> a)-> a`

Запрет на рекурсию

Пример рекурсивной функции

```
fix f = f (fix f)
fix :: (a -> a) -> a
```

- Населён тип `(a -> a) -> a`
- Следовательно, верна теорема $(A \to A) \to A$

Запрет на рекурсию

Пример рекурсивной функции

```
fix f = f (fix f)
fix :: (a -> a) -> a
```

- Населён тип `(a -> a) -> a`
- Следовательно, верна теорема $(A \to A) \to A$
- Её левая часть всегда верна (доказали раньше)

Запрет на рекурсию

Пример рекурсивной функции

```
fix f = f (fix f)
fix :: (a -> a) -> a
```

- Населён тип `(a -> a) -> a`
- Следовательно, верна теорема $(A \to A) \to A$
- Её левая часть всегда верна (доказали раньше)
- Следовательно, верна правая для любого A

Запрет на рекурсию

Пример рекурсивной функции

```
fix f = f (fix f)
fix :: (a -> a) -> a
```

- Населён тип `(a -> a) -> a`
- Следовательно, верна теорема $(A \to A) \to A$
- Её левая часть всегда верна (доказали раньше)
- Следовательно, верна правая для любого A
- Аналогично предыдущему случаю, можем доказать любое утверждение

Запрет на рекурсию в типах

Пример рекурсивного типа

```
data A = Some (A -> A)
```

Запрет на рекурсию в типах

Пример рекурсивного типа

```
data A = Some (A -> A)
```

- В общем и целом, не опасен, просто всегда населён

Запрет на рекурсию в типах

Пример рекурсивного типа

```
data A = Some (A -> A)
```

- В общем и целом, не опасен, просто всегда населён

```
data A = Some (Not A)
```

Запрет на рекурсию в типах

Пример рекурсивного типа

```
data A = Some (A -> A)
```

- В общем и целом, не опасен, просто всегда населён

```
data A = Some (Not A)
```

- Явно вводит в систему логический парадокс: «Утверждение A гласит, что оно неверно»

Запрет на рекурсию в типах

Пример рекурсивного типа

```
data A = Some (A -> A)
```

- В общем и целом, не опасен, просто всегда населён

```
data A = Some (Not A)
```

- Явно вводит в систему логический парадокс: «Утверждение A гласит, что оно неверно»
- Использовать рекурсивные типы можно, но только некоторые

Запрет на рекурсию в типах

Пример рекурсивного типа

```
data A = Some (A -> A)
```

- В общем и целом, не опасен, просто всегда населён

```
data A = Some (Not A)
```

- Явно вводит в систему логический парадокс: «Утверждение A гласит, что оно неверно»

- Использовать рекурсивные типы можно, но только некоторые
- Выделение класса возможных типов — довольно сложная задача

Запрет на рекурсию в типах

Пример рекурсивного типа

```
data A = Some (A -> A)
```

- В общем и целом, не опасен, просто всегда населён

```
data A = Some (Not A)
```

- Явно вводит в систему логический парадокс: «Утверждение A гласит, что оно неверно»

- Использовать рекурсивные типы можно, но только некоторые
- Выделение класса возможных типов — довольно сложная задача
- Эта задача выходит за рамки нашей лекции

Выход из рамок интуиционистской логики

- Требует введения специальных конструкций по образу и подобию парадигмы Call/CC

Выход из рамок интуиционистской логики

- Требует введения специальных конструкций по образу и подобию парадигмы Call/CC
- Call with Current Continuation и Continuation Passing Style позволяют доказать закон Пирса и закон двойного отрицания соответственно

Выход из рамок интуиционистской логики

- Требует введения специальных конструкций по образу и подобию парадигмы Call/CC
- Call with Current Continuation и Continuation Passing Style позволяют доказать закон Пирса и закон двойного отрицания соответственно
  - Закон Пирса: $((A \to B) \to A) \to A$
  - Закон двойного отрицания: $\neg(\neg A) \to A$

Выход из рамок интуиционистской логики

- Требует введения специальных конструкций по образу и подобию парадигмы Call/CC
- Call with Current Continuation и Continuation Passing Style позволяют доказать закон Пирса и закон двойного отрицания соответственно
  - Закон Пирса: $((A \to B) \to A) \to A$
  - Закон двойного отрицания: $\neg(\neg A) \to A$
- Через них можно доказать теорему об исключении третьего

Выход из рамок интуиционистской логики

- Требует введения специальных конструкций по образу и подобию парадигмы Call/CC
- Call with Current Continuation и Continuation Passing Style позволяют доказать закон Пирса и закон двойного отрицания соответственно
  - Закон Пирса: $((A \to B) \to A) \to A$
  - Закон двойного отрицания: $\neg(\neg A) \to A$
- Через них можно доказать теорему об исключении третьего
- Существуют языки с поддержкой этих средств, здесь рассматривать не будем

Связь с выводом типов

- Что такое вывод типов?

Связь с выводом типов

- Что такое вывод типов?
  - У нас есть программа, мы ищем её тип

Связь с выводом типов

- Что такое вывод типов?
  - У нас есть программа, мы ищем её тип
- Что такое доказательство теоремы посредством СНС?

Связь с выводом типов

- Что такое вывод типов?
  - У нас есть программа, мы ищем её тип
- Что такое доказательство теоремы посредством СНС?
  - У нас есть тип, мы пытаемся под него придумать программу

Связь с выводом типов

- Что такое вывод типов?
  - У нас есть программа, мы ищем её тип
- Что такое доказательство теоремы посредством СНС?
  - У нас есть тип, мы пытаемся под него придумать программу
- Что такое вывод типов с точки зрения СНС?

Связь с выводом типов

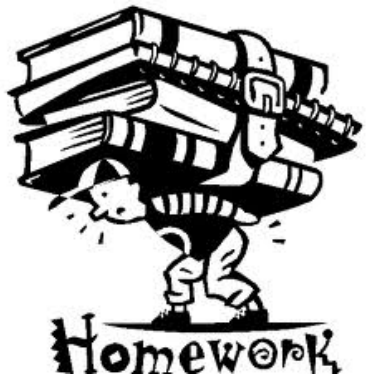
- Что такое вывод типов?
  - У нас есть программа, мы ищем её тип
- Что такое доказательство теоремы посредством СНС?
  - У нас есть тип, мы пытаемся под него придумать программу
- Что такое вывод типов с точки зрения СНС?
  - Полный бред: у нас есть доказательство, мы ищем, что же, собственно, оно доказывает

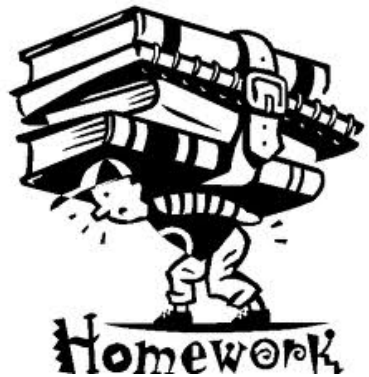
Что мы узнали

- Посмотрели систему доказательств на практике
- Связали логические операции и типы
- Ввели интуиционистскую логику
- Рассмотрели существующие расширения

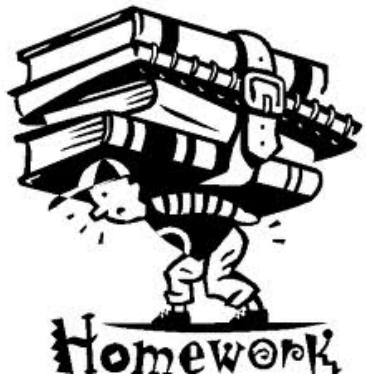
Список литературы

- *Morten Heine B. Sørensen, Pawel Urzyczyn*. Lectures on the Curry-Howard Isomorphism
- *Benjamin C. Pierce*. Types and Programming Languages — ISBN 0-262-16209-1
- Статья «The Curry-Howard Isomorphism» на http://en.wikibooks.org

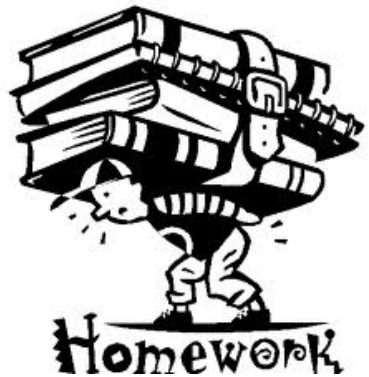

Homework



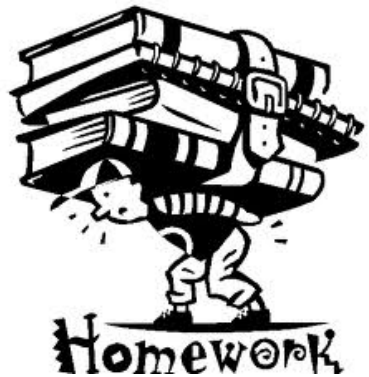
- Возьмите ваш любимый язык программирования



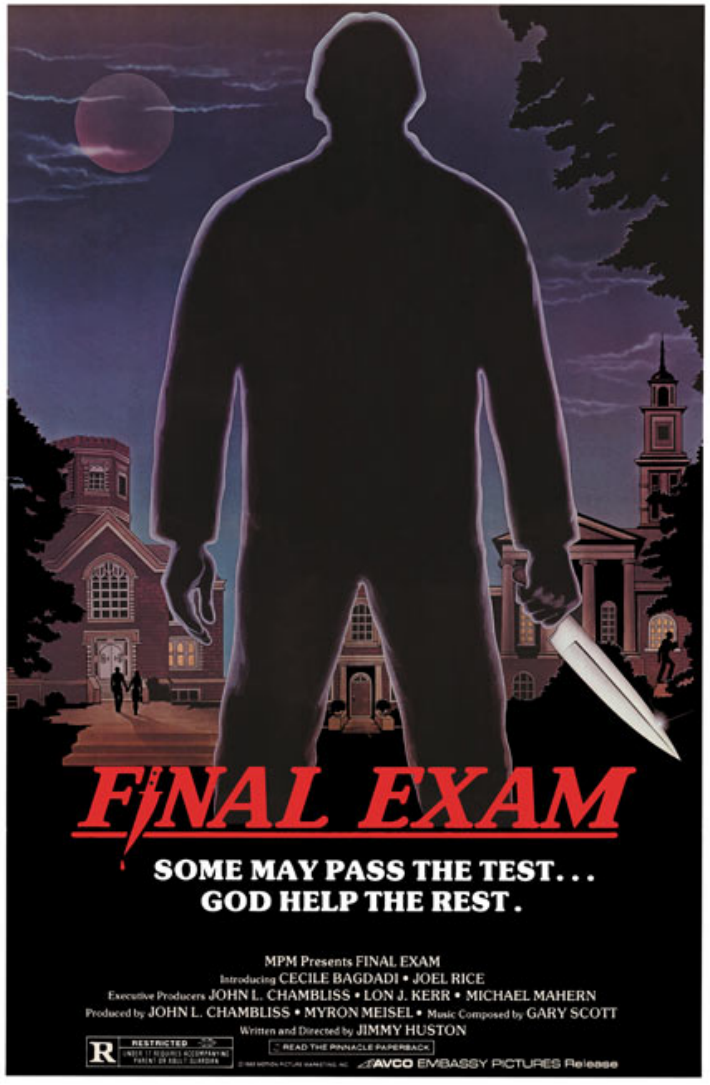
- Возьмите ваш любимый язык программирования
- Рассмотрите его систему типов (или её runtime представление)

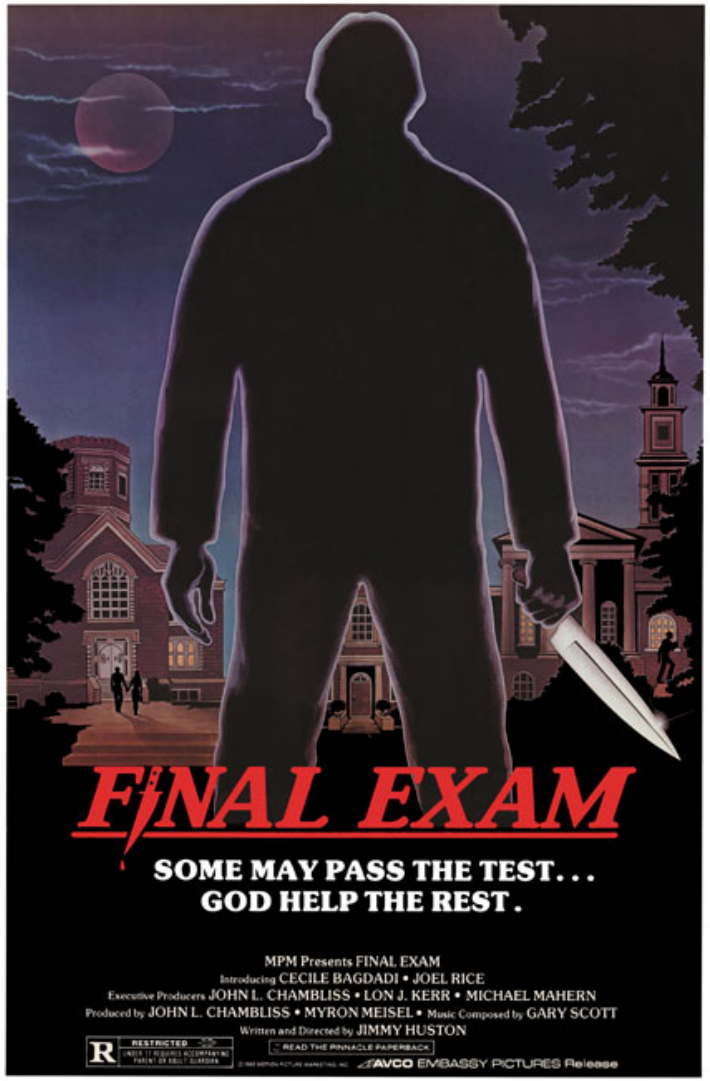


- Возьмите ваш любимый язык программирования
- Рассмотрите его систему типов (или её runtime представление)
- Опишите его с точки зрения Curry-Howard Correspondence



- Возьмите ваш любимый язык программирования
- Рассмотрите его систему типов (или её runtime представление)
- Опишите его с точки зрения Curry-Howard Correspondence


FINAL EXAM
SOME MAY PASS THE TEST...
GOD HELP THE REST.
MPM Presents FINAL EXAM
Introducing CECILE BAGDADI • JOEL RICE
Executive Producers JOHN L. CHAMBLISS • LON J. KERR • MICHAEL MAHERN
Produced by JOHN L. CHAMBLISS • MYRON MEISEL • Music Composed by GARY SCOTT
Written and Directed by JIMMY HUSTON
R
RESTRICTED
READ THE PINNACLE PAPERBACK
AVCO EMBASSY PICTURES Release



See you at the exam! ☺