
Компьютерная алгебра

(курс лекций)

Игорь Алексеевич Малышев
Computer.Algebra@yandex.ru

**«Цель вычислений
в проникновении в суть,
а не в числах».**

(Ричард Хэмминг)

ЧТО ТАКОЕ «КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА» ?

Лекция 1

(вводная)

Общая характеристика учебного курса

Содержание лекции

- Предмет дисциплины
- Место дисциплины в учебном плане
- Структура разделов дисциплины
- Базовый уровень подготовки студентов
- Виды учебных занятий и аттестаций
- Результаты изучения дисциплины
- Источники учебных материалов
- Контактная информация

План лекции: тема подраздела

- **Предмет дисциплины**
- Место дисциплины в учебном плане
- Структура разделов дисциплины
- Базовый уровень подготовки студентов
- Виды учебных занятий и аттестаций
- Результаты изучения дисциплины
- Источники учебных материалов
- Контактная информация

Предмет дисциплины: предыстория

Математика: от рассуждений ...

Евклид «Начала»,
III век до н.э.

Математика – это игра, в которой из множества хорошо подобранных аксиом можно делать интересные выводы.

«Доигрались» - кризис оснований математики !

Давид Гильберт,
рубеж XIX-XX вв.

Математика, оперирующая комбинаторными объектами (аксиомами, доказательствами, теоремами) способна описать результаты, но не процедуру их получения.

Необходимо формализовать математику !

Курт Гёдель,
начало XX века

Всякая аксиоматическая достаточно «интересная» теория обязательно будет неполной (или противоречивой).

Формализовать математику нельзя ???

Предмет дисциплины: предыстория

Математика:

... К ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Революция в математике (1936 г.) – переход от комбинаторики к алгоритмике !

Что такое «алгоритм» ?

Алонзо Чёрч:

λ - исчисление



Джон Маккарти:

язык LISP

Алан Тьюринг:

теоретическая машина



Джон фон Нейман:

компьютер

А как же с формализацией математики ?

Никола Бурбаки: исчисление родов структур !

Предмет дисциплины: ключевые слова

- Алгебра ?

Это раздел математики.

- Компьютерная алгебра ?

Это раздел информатики и вычислительной техники.

- Системы компьютерной алгебры ?

Это аппаратные и/или программные инструментальные средства.

Предмет дисциплины: терминология

Термин «компьютерная алгебра»
появился в конце 70-х годов XX века.

Синонимы:

- Символьные вычисления.
- Аналитические вычисления.
- Формальные вычисления.

Предмет дисциплины: определение

Предмет компьютерной алгебры –
символьные представления
и
аналитические преобразования
математических объектов
в компьютерных системах
обработки информации.

Предмет дисциплины: примеры задач

Типовая задача из алгебры.

- Постановка задачи.

Разложить на простые дроби:

- Способы решения задачи:

- A. *вручную (с карандашом и бумагой)*
- B. *в системе компьютерной алгебры*
- C. *в системе программирования*

$$\frac{x^5 - 7x^4 + 2x - 8}{(x^3 - 4x^2 + 5x)(x - 3)^2}$$

- Результат решения задачи:

$$-\frac{111x - 479}{10(x^2 - 4x + 5)} - \frac{8}{45x} + \frac{257}{18(x - 3)} - \frac{163}{3(x - 3)^2} + 1$$

Предмет дисциплины: примеры задач

Задача вычисления значения иррационального числа - 1.

■ Постановка задачи.

*Вычислить значение числа π (отношение длины окружности к её диаметру) с точностью **1000 знаков** после запятой.*

■ Историческая справка:

■ Результат решения задачи: 1000-й знак = **9**

Период времени, математик	Приближение по формуле	Значение числа π
Древний Египет, Древняя Индия	256 / 81 $\sqrt{10}$	3,160 ... 3,162 ...
Конец XIX века, Вильям Шенкс	22 / 7 (Архимед) + 20 лет труда	707 знаков (ошибка в 520-м знаке – 1945 г.)
1949 г., Дж. фон Нейман	70 часов вычислений на ЭВМ ЭНИАК	2037 знаков
1989 г., Чудновские	неск. часов вычислений на ПЭВМ	> 1 млрд. знаков

Предмет дисциплины: примеры задач

**Задача вычисления значения иррационального числа - 2
(система компьютерной алгебры «Maple»).**

Текст программы решения задачи –
один (!) оператор:

```
> evalf(Pi, 1001); # вычисление числа Pi с точностью 1000 знаков  
# (1 «лишний» знак – это знак «3» (целая часть))  
> evalf(Pi, 1002); # вычисление числа Pi с точностью 1001 знак
```

Результат вычисления – см. след. слайд.

Предмет дисциплины: примеры задач

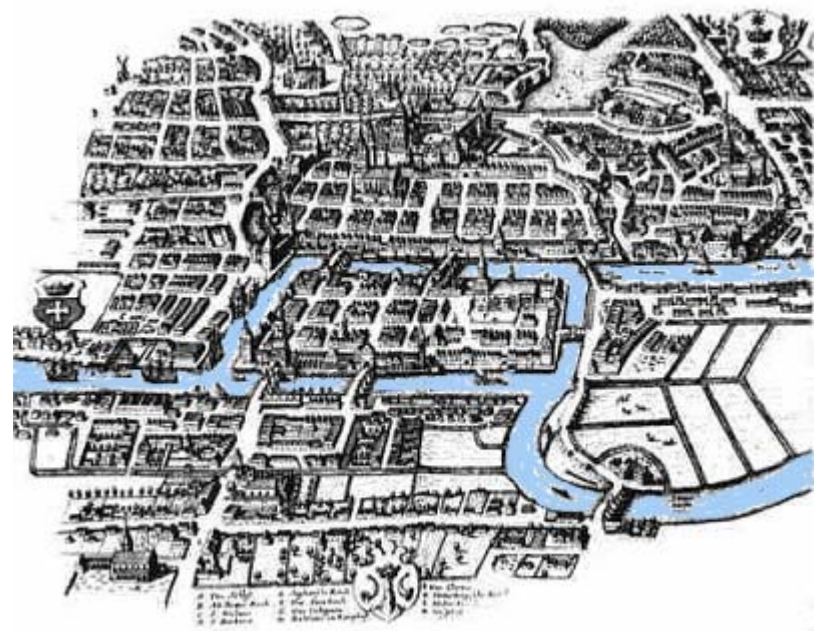
Задача вычисления значения иррационального числа - 3 (система компьютерной алгебры «Maple»).

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816
40628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223
17253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288
10975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454
32664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409
17153643678925903600113305305488204665213841469519415116094330572703
65759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752
72489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070
21798609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452
63560827785771342757789609173637178721468440901224953430146549585371
05079227968925892354201995611212902196086403441815981362977477130996
05187072113499999983729780499510597317328160963185950244594553469083
02642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420
61717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185
7780532171226806613001927876611195909216420198 9 [4 ...]

Предмет дисциплины: примеры задач

Задача о Кёнигсбергских мостах – 1 (Леонард Эйлер).

- Постановка задачи.
Можно ли обойти все 7 мостов в центре Кёнигсберга, побывав на каждом из них ровно 1 раз ?
- Географическая справка
(карта Кёнигсберга, XVIII век):



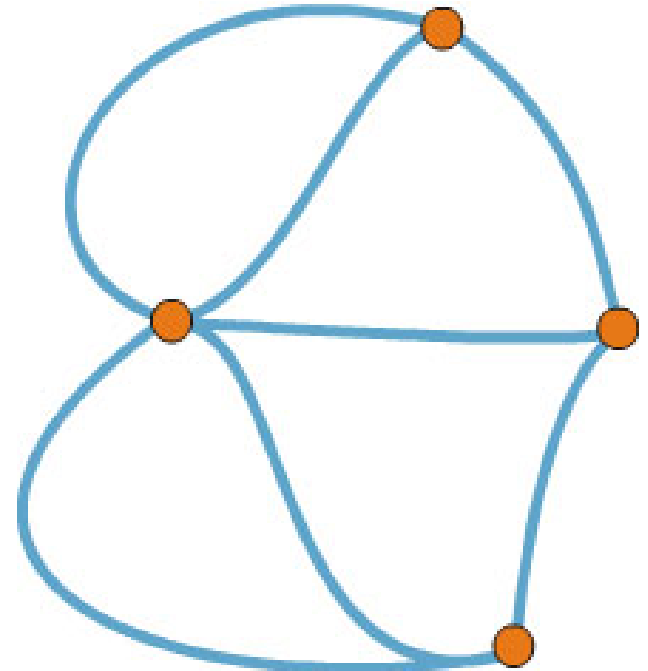
Предмет дисциплины: примеры задач

Задача о Кёнигсбергских мостах - 2 (теория графов).

- Граф Кёнигсбергских мостов:
- Справка из теории графов:

Граф является уникурсальным (эйлеровым), если все его вершины имеют чётный индекс или число вершин с нечётным индексом равно 2.

- Результат решения задачи:
Очевидно, что граф не уникурсален.



Предмет дисциплины: примеры задач

Задача о Кёнигсбергских мостах – 3 (линейная алгебра).

- Матричное представление графа Кёнигсбергских мостов: (элементы матрицы – индексы вершин графа)
- Суммируем значения в строках:
 - 1-я строка = 3
 - 2-я строка = 5
 - 3-я строка = 3
 - 4-я строка = 3
- Результат решения задачи:
Граф не уникурсален, т.к. все вершины имеют нечетный индекс и количество вершин не равно 2.

V	1-я	2-я	3-я	4-я
1-я	0	2	1	0
2-я	2	0	1	2
3-я	1	1	0	1
4-я	0	2	1	0

Предмет дисциплины: примеры задач

Задача о Кёнигсбергских мостах - 4 (система компьютерной алгебры Maxima).

Текст программы решения задачи:

```
V : matrix ([0, 2, 1, 0], [2, 0, 1, 2], [1, 1, 0, 1], [0, 2, 1, 0]);
```

```
v1 : apply("+", V[1]);
```

```
v2 : apply("+", V[2]);
```

```
v3 : apply("+", V[3]);
```

```
v4 : apply("+", V[4]);
```

```
flag: "+"(mod(v1,2), mod(v2,2), mod(v3,2), mod(v4,2));
```

```
if (flag=0 or flag=2) then "Euler's graph" else "non-Euler's graph";
```

Предмет дисциплины: примеры задач

Задача о Кёнигсбергских мостах - 5 (система компьютерной алгебры Maxima).

Протокол решения задачи (начальный фрагмент):

```
(%i1) V : matrix ([0, 2, 1, 0], [2, 0, 1, 2], [1, 1, 0, 1], [0, 2, 1, 0] );
```

```
(%o1)      [ 0 2 1 0 ]  
           [          ]  
           [ 2 0 1 2 ]  
           [          ]  
           [ 1 1 0 1 ]  
           [          ]  
           [ 0 2 1 0 ]
```

```
(%i2) v1 : apply("+", V[1]);
```

```
(%o2)      3
```

```
(%i3) v2 : apply("+", V[2]);
```

```
(%o3)      5
```

```
(%i4) v3 : apply("+", V[3]);
```

```
(%o4)      3
```

```
(%i5) v4 : apply("+", V[4]);
```

```
(%o5)      3
```

План лекции: тема подраздела

- Предмет дисциплины
- **Место дисциплины в учебном плане**
- Структура разделов дисциплины
- Базовый уровень подготовки студентов
- Виды учебных занятий и аттестаций
- Результаты изучения дисциплины
- Источники учебных материалов
- Контактная информация

Место дисциплины в учебном плане

Школьная математика

Высшая
математика

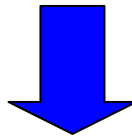
Дискретная
математика

Информатика

Программирование

Математические вычисления на компьютере

Точные
вычисления



**Компьютерная
алгебра**

Приближённые
вычисления



**Вычислительная
математика**

Место дисциплины в учебном плане

«Компьютерная алгебра рассматривает такие объекты, которые имеют **слишком вычислительный характер, чтобы встречаться в книгах **по алгебре**, и **слишком алгебраический** характер, чтобы быть представленными в учебниках **по информатике**»**

*Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления:
Пер. с англ. / Под ред. Б. Бухбергера, Дж. Коллинза, Р. Лооса
– М.: Мир, 1986. – 392 с. - стр. 11-12.*

Место дисциплины в учебном плане

Особенности преподавания курса (1):

Своевременность пополнения и систематизации знаний:

- понимание сути всех аспектов компьютерной алгебры – магистерская программа обучения (5-й и/или 6-й годы университетского образования);
- знание основного набора существующих методов и алгоритмов решения задач компьютерной алгебры в научных, исследовательских и инженерных целях – бакалаврская программа обучения (3-й и/или 4-й годы университетского образования);
- знание общих принципов организации аналитических вычислений, а также способов и средств их реализации для решения задач в ограниченной (общеобразовательной или профессиональной – начального уровня подготовки) предметной области – любой этап университетского (и даже школьного) образования.

Место дисциплины в учебном плане

Особенности преподавания курса (2):

Профессиональная ориентация слушателей (студентов):

- математика (теоретическая и прикладная);
- физика (механика, оптика, электромагнетизм, квантовая физика);
- информатика и управление;
- вычислительная техника и программирование;
- другие профили (химия, генетика, лингвистика и т.п.).

Место дисциплины в учебном плане

Особенности преподавания курса (3):

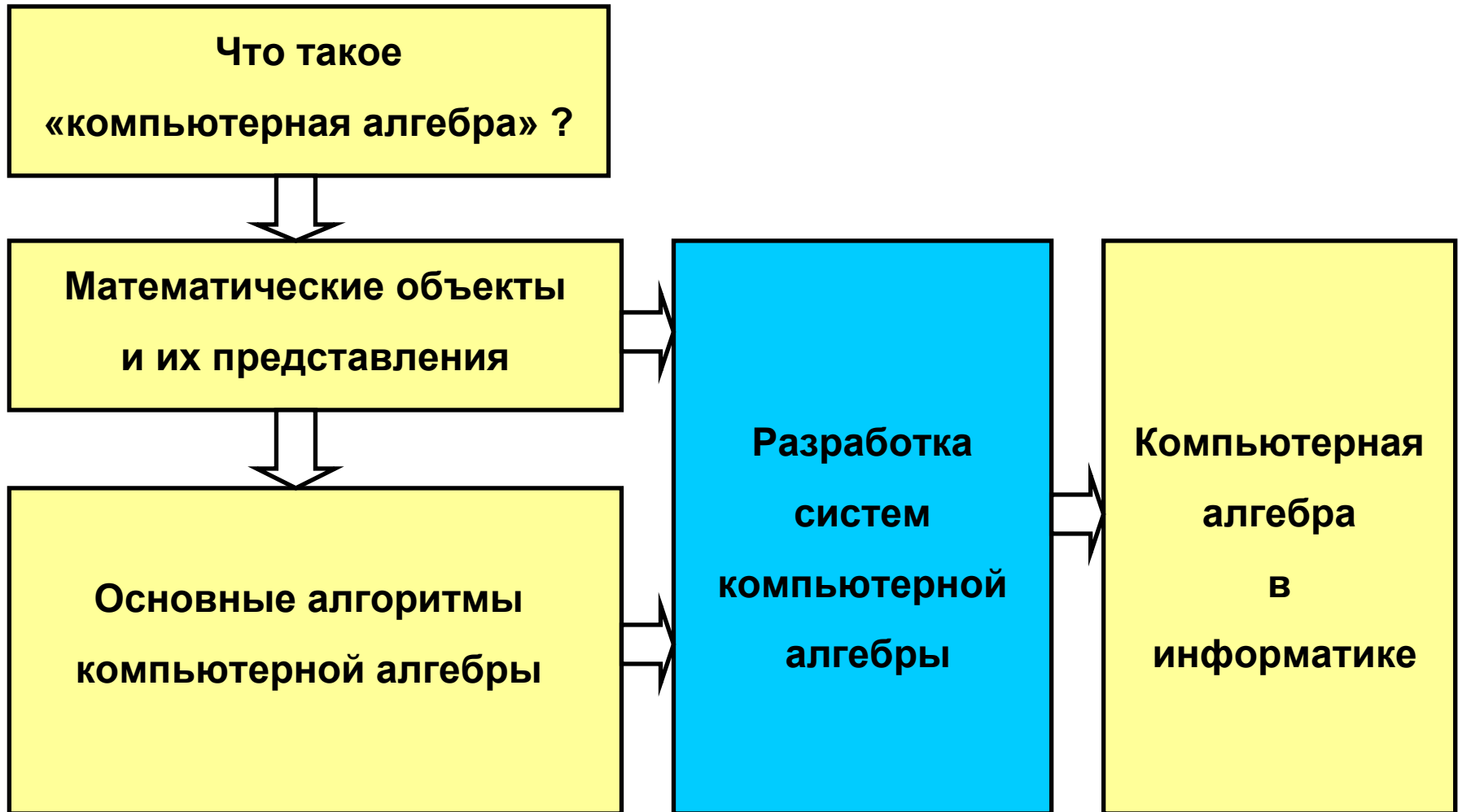
Стиль изложения учебного материала:

- биографии учёных – авторов идей;
- история поиска решений избранных задач;
- классическая дидактика: от аксиом к обобщениям;
- соотношение объёмов теоретической и практической подготовки.

План лекции: тема подраздела

- Предмет дисциплины
- Место дисциплины в учебном плане
- **Структура разделов дисциплины**
- Базовый уровень подготовки студентов
- Виды учебных занятий и аттестаций
- Результаты изучения дисциплины
- Источники учебных материалов
- Контактная информация

Структура разделов дисциплины



План лекции: тема подраздела

- Предмет дисциплины
- Место дисциплины в учебном плане
- Структура разделов дисциплины
- **Базовый уровень подготовки студентов**
- Виды учебных занятий и аттестаций
- Результаты изучения дисциплины
- Источники учебных материалов
- Контактная информация

Базовый уровень подготовки студентов

(I) Что нужно **знать (теория)**:

- Алгебру и начала анализа
(в объёме общеобразовательной школы);
- Дискретную математику
(в объёме односеместрового вузовского курса);
- Высшую математику
(в объёме односеместрового вузовского курса).

Базовый уровень подготовки студентов

(II) Что нужно уметь (практика):

- Решать вручную задачи из школьного и вузовских математических курсов;
- Быть пользователем одной из операционных систем общего назначения;
- Программировать на одном из алгоритмических языков;
- Использовать печатные и электронные (Интернет) публикации для самостоятельного профессионального обучения.

План лекции: тема подраздела

- Предмет дисциплины
- Место дисциплины в учебном плане
- Структура разделов дисциплины
- Базовый уровень подготовки студентов
- **Виды учебных занятий и аттестаций**
- Результаты изучения дисциплины
- Источники учебных материалов
- Контактная информация

Виды учебных занятий и аттестаций

Вид занятия	Периодичность	Место проведения	Форма аттестации
Лекции	2 час / неделя	Аудитория	Экзамен (устный)
Практические занятия: <ul style="list-style-type: none">• упражнения• домашние задания• контрольные работы• расчётные задания• семинары	1 час / неделя	Аудитория + Лаборатория + Домашняя работа	Допуск к экзамену

Виды учебных занятий и аттестаций

Темы семинаров:

- Системы достоверных вычислений;
- Системы алгоритмических алгебр;
- Системы виртуализации информации.

Виды учебных занятий и аттестаций

Расчётные задания (1):

(решение **одной** тематической задачи)

(с помощью **различных** программных систем)

- Система компьютерной алгебры «Maxima»;
- Система программирования Eclipse (язык Common LISP);
- Система компьютерной алгебры «Maple»;
- Система программирования MS Visual Studio (язык C++).

Виды учебных занятий и аттестаций

Расчётные задания (2):

- Типовые –
для реализации
в системах компьютерной алгебры;
- Индивидуальные –
для реализации
в системах программирования.

Виды учебных занятий и аттестаций

Использовать фантастический способ аттестации ?

Высокочастотный измеритель таланта (С. Снегов «Тяжёлая капля тщеславия»)

- Дурак элементарный
- Дурак самодовольный
- Бездарь ординарная
- Бездарь агрессивная
- Середняк рядовой смирный
- Способность векториальная
- Способность общая
- Дарование
- Талант
- Гений

Виды учебных занятий и аттестаций

Использовать фантастический способ аттестации ?

Высокочастотный измеритель таланта
(С. Снегов «Тяжёлая капля тшеславия»)

- Дурак элементарный
- Дурак самодовольный
- Бездарь ординарная
- Бездарь агрессивная
- Середняк рядовой смиренный
- Способность векториальная
- Способность общая
- Дарование
- Талант
- Гений

Виды учебных занятий и аттестаций

Аттестационная шкала – 1..100 баллов

Допуск к экзамену – 65 баллов.

Экзамен:

«3» – 70 ... 79 баллов;

«4» – 80 ... 89 баллов;

«5» – 90 ... 100 баллов.

Виды учебных занятий и аттестаций

Правила вычисления аттестационных оценок:

Вид работы	Баллы за ед.	Количество ед.	Сумма баллов
Посещение / Пропуск лекций		Переменное	+ 20 / - 20
Посещение / Пропуск упражнений		Переменное	+ 15 / - 15
Домашние задания	+ 5	2	+ 10
Контрольные работы	+ 5	2	+ 10
Расчётные задания:			
• пользователь СКА	+ 5	2	+ 10
• программист СКА	+10	2	+ 20
Доклад на семинаре	+ 15	1	+ 15
ИТОГО			+ 65 + 35 = + 100

Виды учебных занятий и аттестаций

Как получить «отлично» без сдачи экзамена ?

Расчёт накопления баллов:

0 баллов	Исходная сумма
+ 20 баллов	Посещение всех лекций
+ 15 баллов	Посещение всех практических занятий
+ 40 баллов	Отличное выполнение: (1) всех типовых заданий - домашних, контрольных, расчётных; (2) одного индивидуального расчётного задания.
+ 15 баллов	Выступление с докладом на одном из семинаров
90 баллов	Конечная сумма (т.е. итоговая оценка - «ОТЛИЧНО»).

План лекции: тема подраздела

- Предмет дисциплины
- Место дисциплины в учебном плане
- Структура разделов дисциплины
- Базовый уровень подготовки студентов
- Виды учебных занятий и аттестаций
- **Результаты изучения дисциплины**
- Источники учебных материалов
- Контактная информация

Результаты изучения дисциплины

- **Знания** математических основ и базовых алгоритмов целочисленной и полиномиальной арифметик, а также функциональных возможностей их применения при решении избранных прикладных задач информатики и вычислительной техники.
- **Умения** выполнять полный цикл алгоритмического анализа и синтеза решения вычислительной задачи в общем (символьном) виде: от ее формальной постановки с помощью математических объектов до выбора структур данных и операторов языка программирования.
- **Навыки** использования существующих и разработки перспективных систем компьютерной алгебры общего и специального назначения.

План лекции: тема подраздела

- Предмет дисциплины
- Место дисциплины в учебном плане
- Структура разделов дисциплины
- Базовый уровень подготовки студентов
- Виды учебных занятий и аттестаций
- Результаты изучения дисциплины
- **Источники учебных материалов**
- Контактная информация

Источники учебных материалов

Учебные материалы для лекций:

- (1) Акритас А. Основы компьютерной алгебры с приложениями (1994)
- (2) Панкратьев Е.В. Элементы компьютерной алгебры (2007)
- (3) Тан К.Ш. и др. Символьный C++: введение в компьютерную алгебру (2001)
- (4) Дэвенпорт Дж. и др. Компьютерная алгебра (1991)
- (5) Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления / Под ред. Б. Бухбергера и др. (1986)
- (6) Ноден П. и др. Алгоритмическая алгоритмика (с упражнениями и решениями) (1999)

Источники учебных материалов

Учебные материалы для практических занятий (1):

Система «Maxima»:

- Система компьютерной алгебры Maxima. Документация :
<http://maxima.sourceforge.net/ru/documentation.html>
- Системы компьютерной алгебры с открытым кодом :
<http://maxima.sourceforge.net/ru/compalg.html>

Система «Maple»:

- Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Maple – система аналитических вычислений для математического моделирования :
http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/MME/courses/maple_c/
- Прохоров Г., Колбеев В., Желнов К., Леденев М. Математический пакет Maple V Release 4: Руководство пользователя :
http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/soft/Maple/kaluga/1.asp.htm
- Манзон Б.М. Maple V Power Edition :
http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/soft/Maple/manson/poweredition/0.asp.htm

Источники учебных материалов

Учебные материалы для практических занятий (2):

Система «Maple» (продолжение):

- Иванов А.О., Булычева С.В. Прикладной математический пакет Maple / Центр технологий дистанционного обучения Уральского государственного университета :
<http://detc.usu.ru/assets/amath0011/index.htm>
- Справочник по системе компьютерной математики Maple 7 :
<http://mapleseven.net/>

Язык программирования «Common Lisp»:

- Городняя Л.В., Березин Н.А. Введение в программирование на Лиспе / Интернет университет информационных технологий :
<http://www.intuit.ru/department/pl/lisp/>
- Файфель Б.Л. Очень краткое введение в язык Лисп :
<http://homelisp.ru/help/lisp.html>
- Водолазский В. Введение в Lisp :
<http://www.cardarmy.ru/proekt/gcl.htm>
- Peter Seibel, Practical Common Lisp / Пер. с англ. :
<http://lisper.ru/pcl/>

Источники учебных материалов

Общедоступные библиотечные ресурсы:

1) Фундаментальная библиотека СПбГПУ (ОУЛ, ОНЛ, чит. залы);

2) Электронная библиотека Book Finder:

<http://bookfi.org/>

3) Интернет-университет информационных технологий:

<http://www.intuit.ru/>

План лекции: тема подраздела

- Предмет дисциплины
- Место дисциплины в учебном плане
- Структура разделов дисциплины
- Базовый уровень подготовки студентов
- Виды учебных занятий и аттестаций
- Результаты изучения дисциплины
- Источники учебных материалов
- **Контактная информация**

Контактная информация

- Сайт учебного курса:

<http://kspt.ftk.spbstu.ru/course/comp-algebra/>

- Оперативная связь с преподавателем
(E-mail): Computer.Algebra@yandex.ru

Спасибо за внимание !

Вопросы ?