Надежность систем и устройств

Лекция 3.
Методы теории случайных процессов

Глухих Михаил Игоревич, к.т.н., доц.
mailto: glukhikh@mail.ru

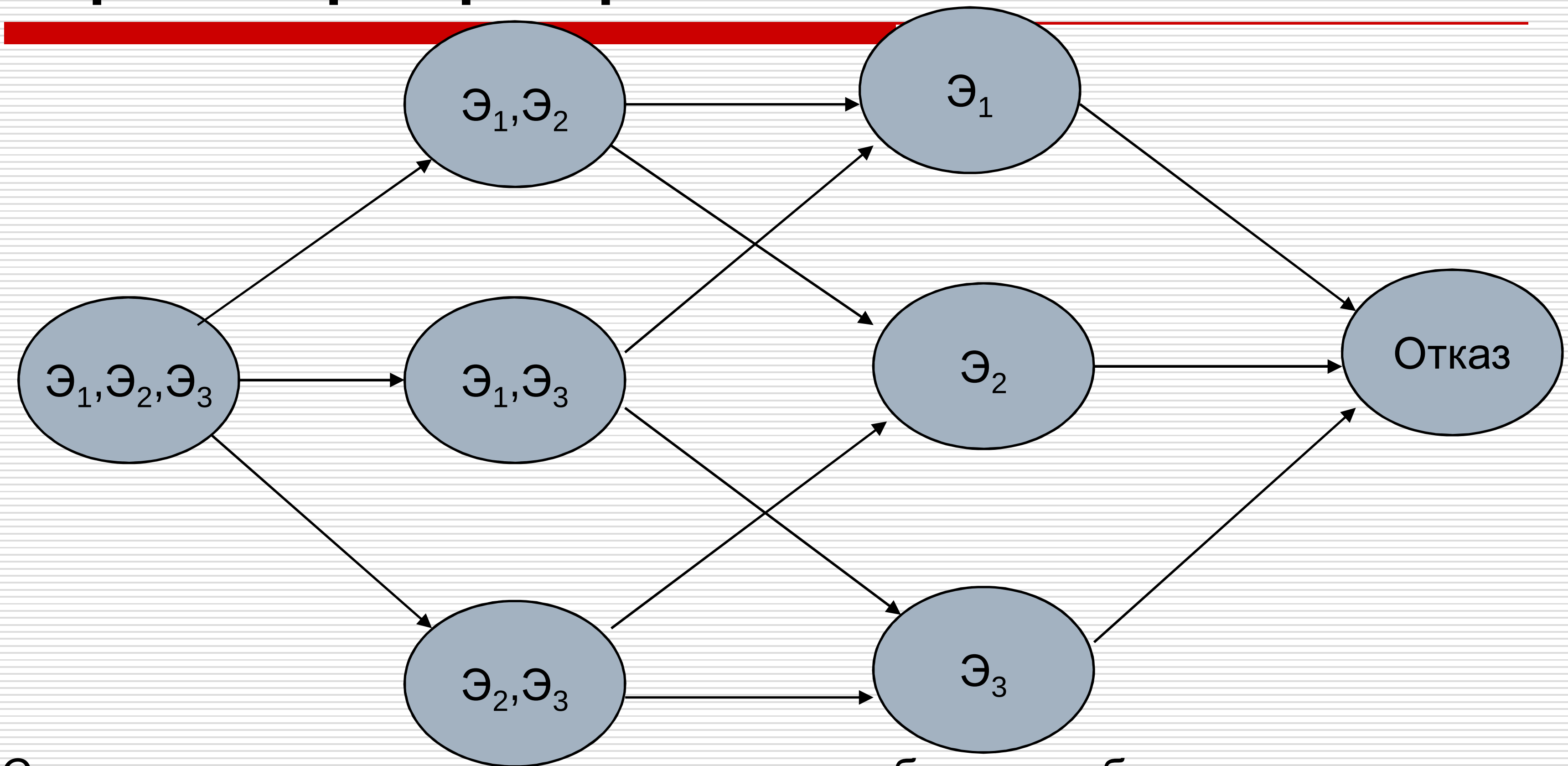
Область применения

- Зависимые интенсивности отказов и восстановлений отдельных устройств
- Изучение законов распределения отказов сложных устройств и систем

Система с дискретным набором состояний

Система должна быть разбита на множество атомарных элементов, у элементов должно быть выделено конечное число состояний

Пример графа состояний



Система состоит из трех элементов, для работоспособности достаточно одного (любого) из них. Интенсивности переходов могут зависеть от времени и соответствуют различным событиям (отказам, восстановлениям).

Способы анализа графа состояний

1. Аналитическое решение
   - в статике
   - в динамике
2. Численное решение
3. Моделирование

Порядок расчета

1. Составить граф состояний системы, определить интенсивности переходов.
2. Для каждого из состояний составить дифференциальное уравнение:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{m-\text{входы}} \lambda_{mi} P_m(t) - \sum_{k-\text{выходы}} \lambda_{ik}(t) P_i(t)$$

3. Проверить получившуюся систему – сумма правых частей должна быть равна 0
4. Заменить одно из уравнений на нормировочное:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1$$

5. Добавить начальные условия.
6. Решить получившуюся систему уравнений Колмогорова-Чепмена.

Моделирование

- Необходим генератор случайных интервалов
- Как перейти от равномерного распределения к экспоненциальному?

Моделирование

- Необходим генератор случайных интервалов
- Как перейти от равномерного распределения к экспоненциальному?
- $e^{-\lambda t}=r \Rightarrow t=-(\ln(r))/\lambda$, где $0<r<1$

Решение системы Колмогорова-Чепмена (численно)

- Методы
  - Эйлера
  - Рунге-Кутта
  - ...
- Средства
  - MatLab
  - SciLab
  - ...

Решение системы Колмогорова-Чепмена (статика)

- Имеет смысл, если отсутствуют поглощающие состояния
  1. Приравнять нулю все производные в левых частях.
  2. Решить получившуюся систему линейных уравнений.
  3. Получим постоянные вероятности состояний после окончания переходных процессов.

Решение системы Колмогорова-Чепмена (динамика)

1. Убрать последнее (нормировочное) уравнение. Образуется система P’+ΛP=B, где P, Λ, B - матрицы.
2. Найти собственные числа x_i матрицы коэффициентов Λ: |Λ-XE|=0.
3. Искать решение в виде

$$P_i(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \exp(-x_j t) + P_i^{const}$$

4. При наличии совпадающих x_i искать решение в виде

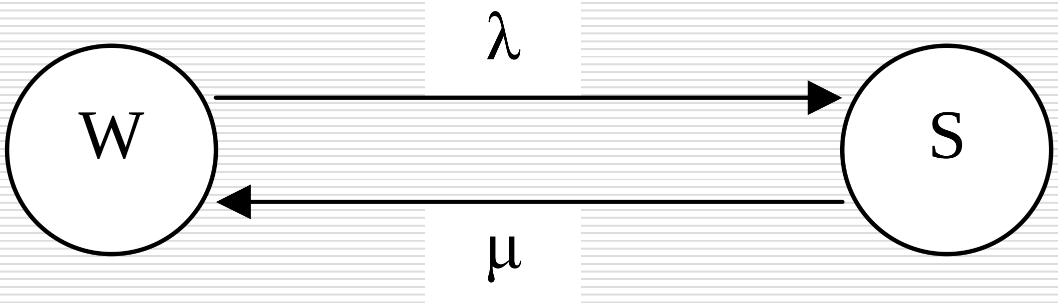
$$P_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} C_{ij} \exp(-x_j t) + C_{in} t \exp(-x_{n-1} t) + P_i^{const}$$

5. При поиске констант C_{ij} учесть, что при t=0 вероятность начального состояния равна 1, а вероятность остальных состояний равна 0.
6. Получим зависимость вероятностей состояний от времени.

Пример 1 – восстанавливаемый безопасный объект

- Интенсивность отказов ЭВМ $\lambda = 0.5$ отказов в год
- Восстановление в среднем занимает 1 месяц

Граф состояний ЭВМ
и система уравнений



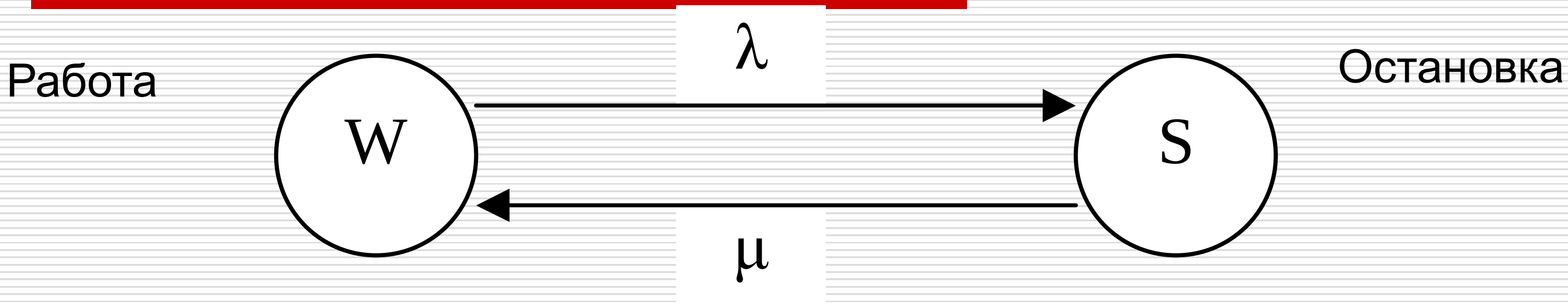
Работа

Остановка

$$\frac{dP_S(t)}{dt} = \lambda P_W(t) - \mu P_S(t)$$

$$\frac{dP_W(t)}{dt} = \mu P_S(t) - \lambda P_W(t)$$

Граф состояний ЭВМ и система уравнений



$$\frac{dP_S(t)}{dt} = \lambda P_W(t) - \mu P_S(t)$$

$$\cancel{\frac{dP_W(t)}{dt} = \mu P_S(t) - \lambda P_W(t)}$$

$$P_W(t) + P_S(t) = 1$$

Решение в статике

$$\lambda P_w - \mu P_s = 0$$

$$P_w + P_s = 1$$

Решение в статике

$$\lambda P_w - \mu P_s = 0$$

$$\mu P_w + \mu P_s = \mu$$

$$P_w = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{12}{12.5} = 96\%$$

Решение в статике

$$\lambda P_w - \mu P_s = 0$$

$$\mu P_w + \mu P_s = \mu$$

$$P_w = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{12}{12.5} = 96\%$$

$$P_s = 1 - P_w = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{0.5}{12.5} = 4\%$$

Решение в динамике – удаление нормировочного уравнения

$$P_w(t) = 1 - P_s(t)$$

$$\frac{dP_S(t)}{dt} = \lambda P_W(t) - \mu P_S(t)$$

Решение в динамике – удаление нормировочного уравнения

$$P_w(t) = 1 - P_s(t)$$

$$\frac{dP_S(t)}{dt} = \lambda P_W(t) - \mu P_S(t)$$

$$\frac{dP_S(t)}{dt} = \lambda - \lambda P_S(t) - \mu P_S(t)$$

Решение в динамике – удаление нормировочного уравнения

$$P_w(t)=1-P_s(t)$$

$$\frac{dP_S(t)}{dt}=\lambda P_W(t)-\mu P_S(t)$$

$$\frac{dP_S(t)}{dt}=\lambda-\lambda P_S(t)-\mu P_S(t)$$

$$\frac{dP_s(t)}{dt}+(\lambda+\mu)P_s(t)=\lambda$$

Решение в динамике – общее решение

1. Собственное число $x=\lambda+\mu$ (матрица Λ?).
2. Решение однородного уравнения:

$$P_s(t) = Ce^{-xt} = Ce^{-(\lambda+\mu)t}$$

3. Общее решение неоднородного уравнения =
Общее решение однородного уравнения
+
Частное решение неоднородного уравнения

Решение в динамике – общее решение

1. Собственное число $x=\lambda+\mu$.
2. Решение однородного уравнения:

$$P_s(t) = Ce^{-(\lambda+\mu)t}$$

3. Частное решение неоднородного уравнения:

$$P_S = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Решение в динамике – общее решение

1. Собственное число $x=\lambda+\mu$.
2. Решение однородного уравнения:

$$P_s(t)=Ce^{-(\lambda+\mu)t}$$

3. Общее решение неоднородного уравнения:

$$P_S(t)=Ce^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Решение в динамике – расчет констант

$$P_S(t) = Ce^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

1. Так как $P_s(0)=0$, то $C+\lambda/(\lambda+\mu)=0$, поэтому $C=-\lambda/(\lambda+\mu)=0.04$.

Решение в динамике – расчет констант

$$P_S(t) = Ce^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

1. Так как $P_s(0)=0$, то $C+\lambda/(\lambda+\mu)=0$, поэтому $C=-\lambda/(\lambda+\mu)=0.04$.
2. Вероятность остановки: $P_S(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$

Решение в динамике – расчет констант

$$P_S(t) = Ce^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

1. Так как $P_s(0)=0$, то $C+\lambda/(\lambda+\mu)=0$, поэтому $C=-\lambda/(\lambda+\mu)=0.04$.
2. Вероятность остановки: $P_S(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$
3. Вероятность рабочего состояния:

$$P_w = 1 - P_S(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

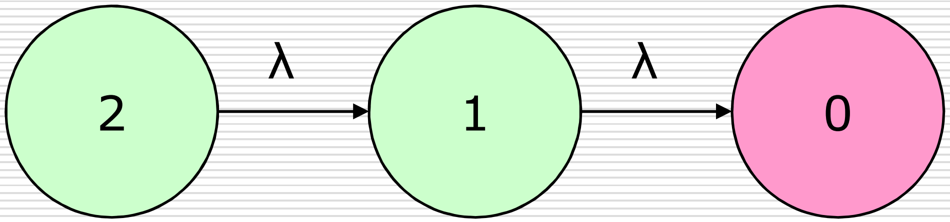
Вопрос

- Как можно было бы учесть тот факт, что ремонт, начиная с какого-то момента времени, экономически нецелесообразен?

Пример 2 – система с резервом

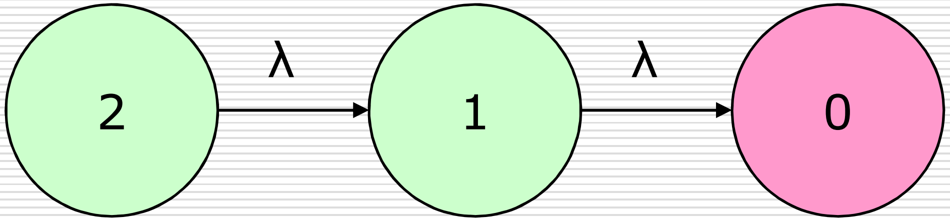
- Хотим, чтобы объект работал подольше
- Для этого берем два объекта
- Первый работает, пока не сломается
- Второй включаем, когда сломался первый
- Только когда сломались оба, система считается отказавшей
- Постройте граф состояний

Граф состояний системы с резервом (холодным)

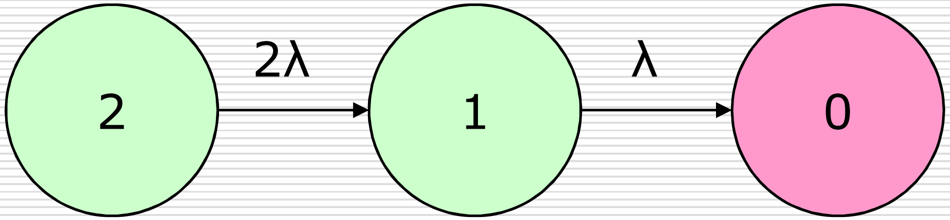


а что будет, если работают два объекта сразу?

Граф состояний системы с резервом

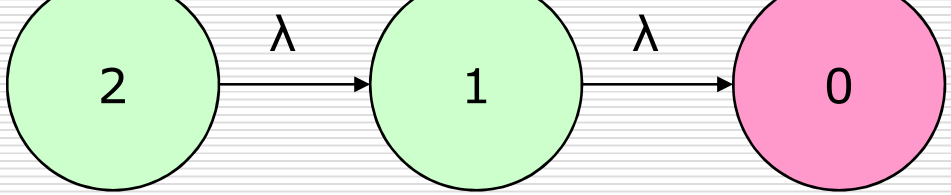


для сравнения – вариант, когда изначально работают два объекта сразу



в чем выигрыш такой системы?

Граф состояний для системы с резервом (уравнения)



Система

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda P_2(t)$$

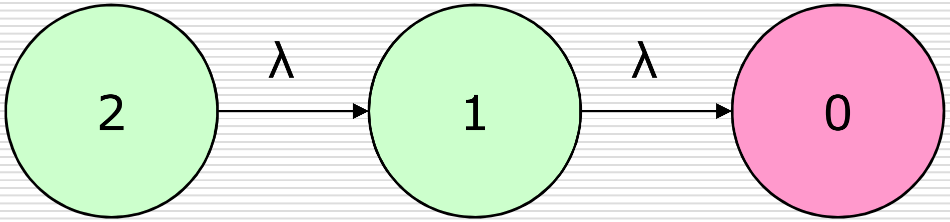
$$\cancel{\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_2(t) - \lambda P_1(t)}$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \lambda P_1(t)$$

$$P_2(t) + P_1(t) + P_0(t) = 1$$

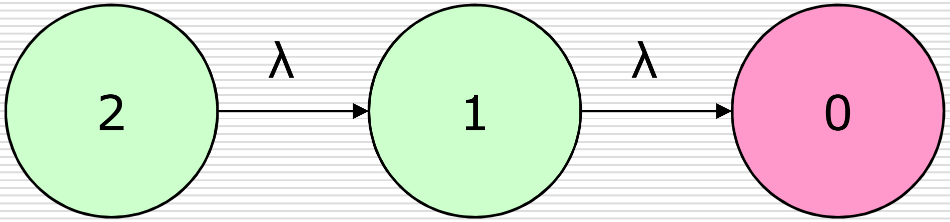
Решение в статике?

Граф состояний для системы с резервом (исключение)



Система
$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda P_2(t)$$
$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \lambda - \lambda P_2(t) - \lambda P_0(t)$$
$$P_1(t) = 1 - P_2(t) - P_0(t)$$

Граф состояний для системы с резервом (норм. форма)



Система

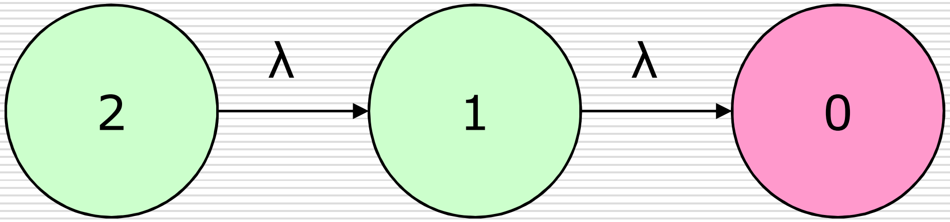
$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = 0$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_2(t) + \lambda P_0(t) = \lambda$$

$$P_1(t) = 1 - P_2(t) - P_0(t)$$

Найдите собственные числа

Граф состояний для системы с резервом (норм. форма)



Система

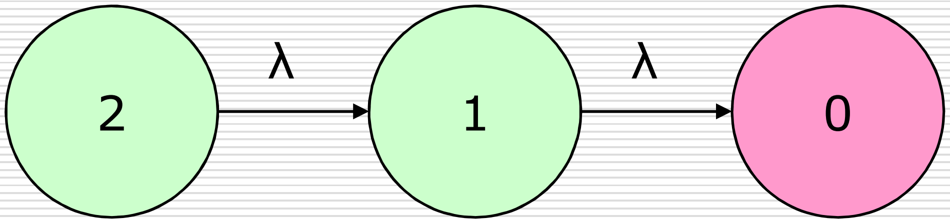
$$\frac{dP_2(t)}{dt}+\lambda P_2(t)=0$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt}+\lambda P_2(t)+\lambda P_0(t)=\lambda$$

$$P_1(t)=1-P_2(t)-P_0(t)$$

Собственные числа – λ, λ

Граф состояний для системы с резервом (поиск реш.)



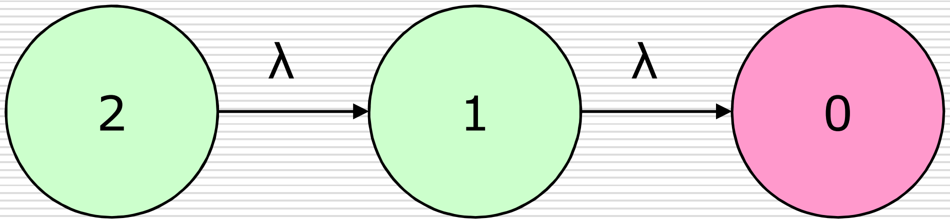
Ищем решение в форме

$$P_2(t) = C_0 e^{-\lambda t} + C_1 t e^{-\lambda t}$$

$$P_0(t) = 1 + D_0 e^{-\lambda t} + D_1 t e^{-\lambda t}$$

Откуда 1?

Граф состояний для системы с резервом (поиск реш.)



Ищем решение в форме

$$P_2(t) = C_0 e^{-\lambda t} + C_1 t e^{-\lambda t}$$

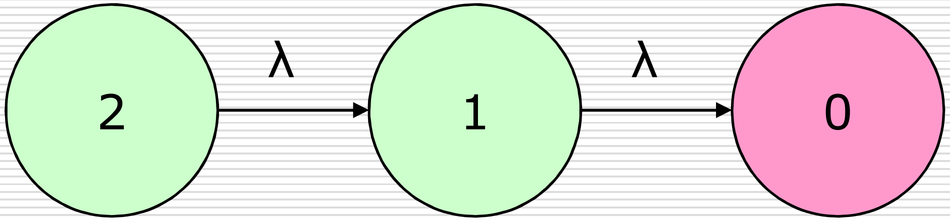
$$P_0(t) = 1 + D_0 e^{-\lambda t} + D_1 t e^{-\lambda t}$$

Из начальных условий

$$C_0 = 1$$

$$1 + D_0 = 0 \Rightarrow D_0 = -1$$

Граф состояний для системы с резервом (поиск реш.)



Ищем решение в форме

$$P_2(t) = e^{-\lambda t} + C_1 t e^{-\lambda t}$$

$$P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} + D_1 t e^{-\lambda t}$$

Из системы

$$\left(-\lambda e^{-\lambda t} + C_1 e^{-\lambda t} - C_1 \lambda t e^{-\lambda t}\right) + \lambda\left(e^{-\lambda t} + C_1 t e^{-\lambda t}\right) = 0$$

$$\lambda e^{-\lambda t} + D_1 e^{-\lambda t} - D_1 \lambda t e^{-\lambda t} + \lambda\left(e^{-\lambda t} + C_1 t e^{-\lambda t}\right) + \lambda\left(1 - e^{-\lambda t} + D_1 t e^{-\lambda t}\right) = \lambda$$

Граф состояний для системы с резервом (поиск реш.)

$$2 \xrightarrow{\lambda} 1 \xrightarrow{\lambda} 0$$

Ищем решение в форме

$$P_2(t) = e^{-\lambda t} + C_1 t e^{-\lambda t}$$

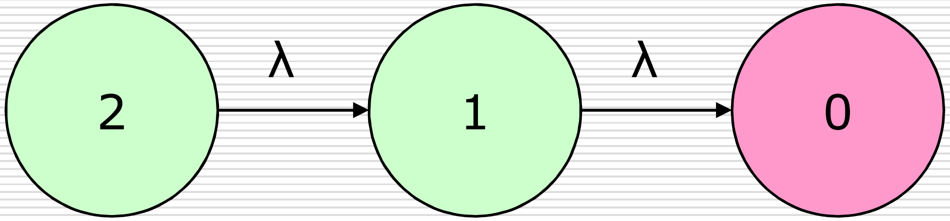
$$P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} + D_1 t e^{-\lambda t}$$

Из системы

$$\left(C_1 e^{-\lambda t} - C_1 \lambda t e^{-\lambda t} + C_1 \lambda t e^{-\lambda t}\right) = 0$$

$$\lambda e^{-\lambda t} + D_1 e^{-\lambda t} - D_1 \lambda t e^{-\lambda t} + \lambda\left(e^{-\lambda t} + C_1 t e^{-\lambda t}\right) + \lambda\left(1 - e^{-\lambda t} + D_1 t e^{-\lambda t}\right) = \lambda$$

Граф состояний для системы с резервом (поиск реш.)



Ищем решение в форме

$$P_2(t) = e^{-\lambda t}$$

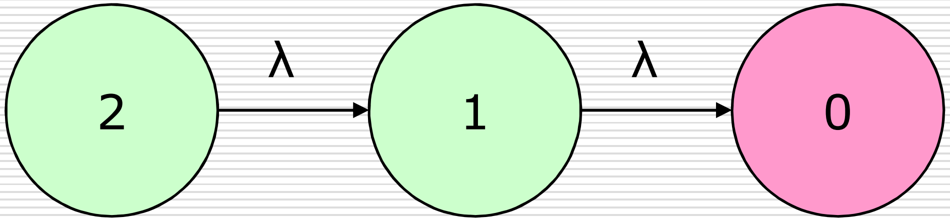
$$P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} + D_1 t e^{-\lambda t}$$

Из системы

$$C_1 = 0$$

$$+\lambda\left(e^{-\lambda t}\right) + \left(D_1 e^{-\lambda t} - D_1 \lambda t e^{-\lambda t} + D_1 \lambda t e^{-\lambda t}\right) = 0$$

Граф состояний для системы с резервом (поиск реш.)



Ищем решение в форме

$$P_2(t) = e^{-\lambda t}$$

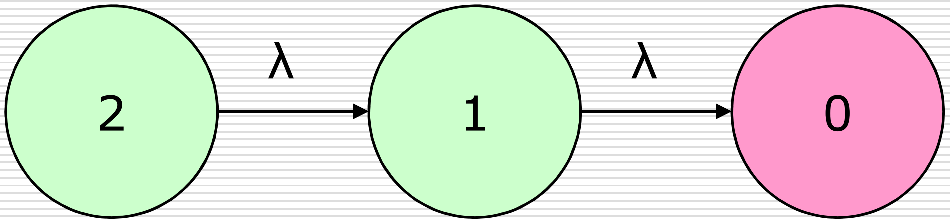
$$P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$$

Из системы

$$C_1 = 0$$

$$D_1 = -\lambda$$

Граф состояний для системы с резервом (решение)



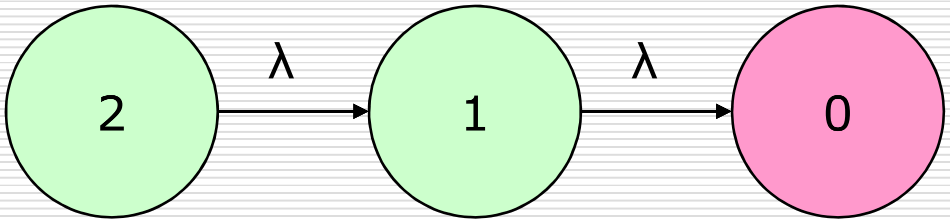
Решение

$$P_2(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$$

Граф состояний для системы с резервом (решение)



Решение

$$P_W(t) = P_2(t) + P_1(t) = (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$$

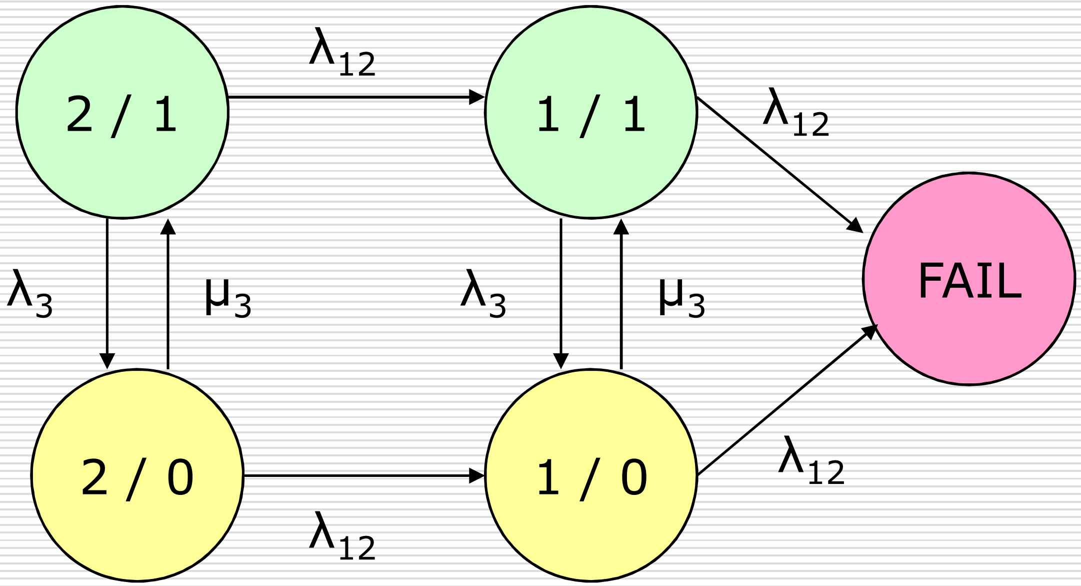
$$\lambda_*(t) = -\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\lambda^2 t}{1 + \lambda t}$$

Подобная модель подходит для описания старения

Пример 3 – система с несколькими элементами

- Построить граф состояний системы, включающей в себя 3 элемента: $Э_1$, $Э_2$, $Э_3$. Система работоспособна, когда работоспособен элемент $Э_3$ и элемент $Э_1$; элемент $Э_2$ – идентичный резерв для элемента $Э_1$, изначально выключен. Элемент $Э_3$ ремонтопригоден.

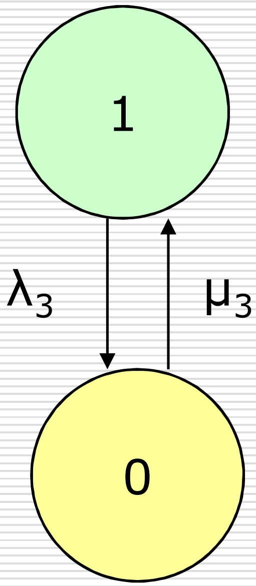
Граф состояний системы из трех элементов



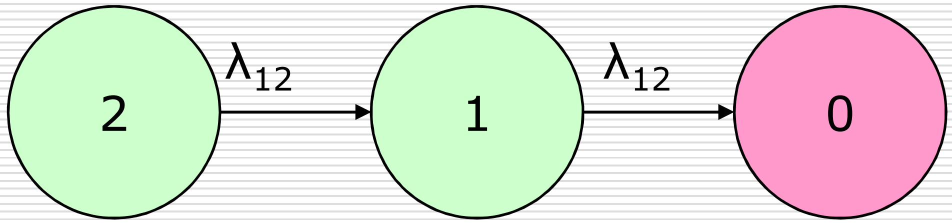
дальнейшие действия?

Разбиение графа состояний

Система из $Э_3$



Система из $Э_1$ и $Э_2$

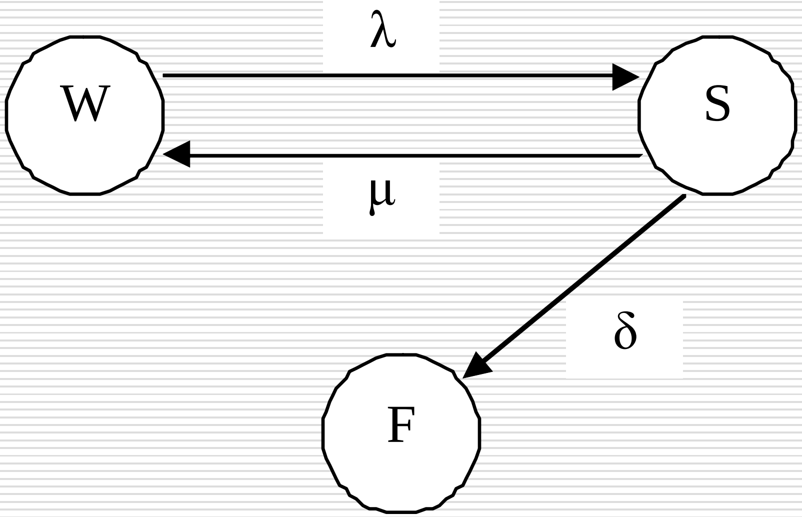


И далее решаем отдельно! Каким будет ответ?

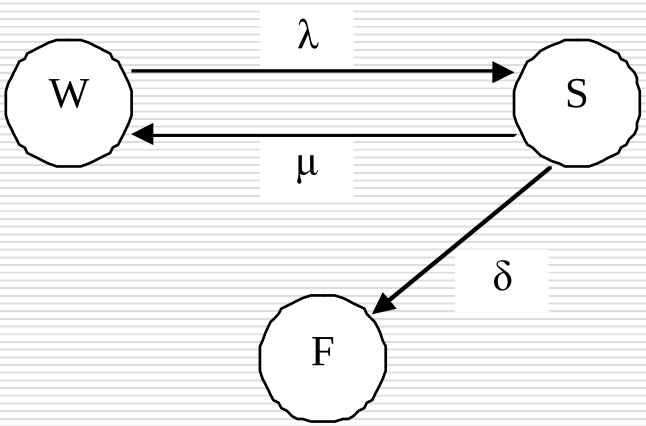
Пример решения задачи с помощью SciLab

- Интенсивность отказов ЭВМ составляет 0.5 отказов в год.
- После отказа, ЭВМ может быть отдана в ремонт, который занимает в среднем 1 месяц.
- С вероятностью 90% ремонт является успешным, возможно продолжение использования ЭВМ
- С вероятностью 10% отремонтировать ЭВМ не удается - в этом случае ее срок службы считается оконченным.

Граф состояний системы



Граф состояний системы, уравнения



$$\frac{dP_W(t)}{dt} = \mu P_s(t) - \lambda P_W(t)$$

$$\frac{dP_S(t)}{dt} = \lambda P_W(t) - (\mu + \delta) P_S(t)$$

$$\frac{dP_F(t)}{dt} = \delta P_S(t)$$

$$P_W(t) + P_S(t) + P_F(t) = 1$$

Демонстрация решения в SciLab

- TODO – использование файлов!
- function ydot=f(t,y)
  ydot(1) = 10.8*y(2) - 0.5*y(1)
  ydot(2) = 0.5*y(1) - 12.0*y(2)
  ydot(3) = 1.2*y(2)
  endfunction
- t0 = 0;
  y0 = [1,0,0];
- t = 0:0.1:10;
- y=ode(y0,t0,t,f);
- plot(t,y(1:3:301));
  plot(t,y(2:3:302));
  plot(t,y(3:3:303));

Программа лабораторной работы №2

- Исследование системы с резервным элементом.
  - Составить граф состояний.
  - Построить систему дифференциальных уравнений.
  - Решить систему с помощью SciLab.
  - Построить график изменения вероятностной функции для различных состояний с помощью SciLab.
  - Сопоставить результаты с теоретическими.
- Исследование сложной системы (по вариантам).
  - Составить граф состояний.
  - Построить систему дифференциальных уравнений.
  - Решить систему с помощью SciLab.
  - Построить график изменения вероятностной функции
  - Решить ту же задачу с помощью ReliabilityAnalyzer и сопоставить результаты